# Points algébriques de hauteur bornée

Cécile Le Rudulier

ANNÉE 2014

**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : mathématiques et applications*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par


# Cécile Le Rudulier

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de recherche mathématique de Rennes
UFR de mathématiques


---

# Points algébriques de hauteur bornée

**Thèse soutenue à Rennes le 31 octobre 2014**

devant le jury composé de :

David Bourqui / maître de conférence
Université de Rennes 1 / examinateur

Régis de la Bretèche / professeur
Université de Paris 7 / examinateur

Antoine Chambert-Loir / professeur
Université de Paris-Sud / directeur de thèse

Huayi Chen / professeur
Université de Grenoble / rapporteur

Ulrich Derenthal / professeur
Université de Hanovre / rapporteur

# REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord chaleureusement Antoine Chambert-Loir et David Bourqui. Le premier pour m'avoir fait découvrir un sujet passionnant mêlant géométrie et arithmétique, les deux domaines qui m'ont toujours le plus intéressé en mathématiques, et pour avoir encadré mon stage de M2 puis cette thèse – depuis Rennes ou Paris – avec une grande attention tout au long de ces trois années. Je garderai un très bon souvenir de nos longues heures de discussions autour d'une tasse de thé, qui ont toujours su me motiver dans mes recherches. Le second pour m'avoir ouvert les portes de la recherche en encadrant mon séminaire de M2 et surtout pour avoir accepté de suivre mon travail pendant mes deux dernières années de thèse, en y consacrant beaucoup de temps. Je le remercie particulièrement pour la relecture minutieuse du manuscrit de cette thèse et ses nombreux conseils.

Merci à mes deux rapporteurs, Ulrich Derenthal et Huayi Chen, d'avoir accepté de relire cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches. Les remarques d'Ulrich Derenthal ont contribué à l'amélioration de ce texte et je l'en remercie.

Je remercie David Bourqui, Régis de la Bretèche, Huayi Chen et Ulrich Derenthal d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

L'IRMAR est un laboratoire de recherche où il est très agréable de travailler. Je remercie donc tous les chercheurs et les personnels que j'ai eu l'occasion de côtoyer et de connaître pendant mes sept années d'étude à l'université de Rennes 1 et qui ont toujours été accueillantes et sympathiques. Je remercie en particulier mes collègues du bureau 620, Jérémy et Tristan, ainsi que les voisins du bureau 621, Basile, Gwezheneg et Julien, pour les discussions, mathématiques ou non, qui ont rendu les journées au bureau bien agréables. Merci également à tous les doctorants et post-doctorants de l'IRMAR pour les moments passés au RU, aux pauses thé/mots croisés, aux séminaires et autres groupes de travail.

Je remercie ma famille et mes amis pour leurs marques de soutien et d'intérêt. Merci à ceux qui ont essayé de retenir et/ou de comprendre mon sujet de thèse. Merci à ceux qui sont venus aujourd'hui, parfois de loin, pour assister à cette soutenance et qui m'ont aidée à préparer cette journée. Et enfin, merci à Quentin d'être à mes côtés jour après jour.

# TABLE DES MATIÈRES

**Remerciements** **i**

**Introduction** **3**

**1 Hauteurs adéliques et conjecture de Manin** **11**
1.1 Fibrés en droites adéliquement métrisés . . . . . . . . . . 11
1.1.1 Métriques sur un fibré en droites . . . . . . . . . 11
1.1.2 Métriques adéliques sur un fibré très ample . . . . 13
1.1.3 Métriques adéliques sur un fibré quelconque . . . 16
1.2 Hauteurs associées à une métrique adélique . . . . . . . . 18
1.2.1 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
1.2.2 Propriétés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
1.3 Conjecture de Manin et produit symétrique . . . . . . . 24
1.3.1 Énoncé de la conjecture . . . . . . . . . . . . . . . 24
1.3.2 Définition de la constante de Peyre . . . . . . . . 27
1.3.3 Produit symétrique et points algébriques . . . . . 29

**2 Points algébriques d'une courbe projective** **33**
2.1 Points rationnels de $\mathrm{Sym}^m \mathbf{P}^1$ . . . . . . . . . . . . . . . 33
2.2 Points algébriques de $\mathbf{P}^1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.3 Calculs de constantes de Peyre . . . . . . . . . . . . . . . 37
2.3.1 Métrique usuelle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
2.3.2 Métrique euclidienne . . . . . . . . . . . . . . . . 42
2.3.3 Métrique induite par une droite de $\mathbf{P}^2$ . . . . . . 43
2.4 Produit symétrique d'une courbe rationnelle . . . . . . . 45
2.5 Courbes de genre supérieur . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.6 Points quadratiques d'une courbe projective . . . . . . . 49

**3 Étude de la conjecture de Manin pour le produit symétrique d'une surface 57**

3.1 Schéma de Hilbert ponctuel d'une surface . . . . . . . . . 58
3.1.1 Groupe de Picard et fibré canonique . . . . . . . 58
3.1.2 Cône effectif . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
3.2 Points rationnels du schéma de Hilbert ponctuel . . . . . 64
3.2.1 Propriété de Northcott . . . . . . . . . . . . . . . 65
3.2.2 Énoncé de la conjecture . . . . . . . . . . . . . . 65
3.2.3 Constantes de Peyre pour $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ et $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$ 66
3.3 Phénomènes d'accumulation . . . . . . . . . . . . . . . . 73
3.3.1 Incompatibilités avec la conjecture 1.24 forte . . . 73
3.3.2 Ensembles accumulateurs issus des courbes . . . . 75

**4 Exemples des surfaces $\mathbf{P}^2$ et $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ 81**

4.1 Cas de $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ sur $\mathbf{Q}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
4.1.1 Points quadratiques sur $\mathbf{P}^2$ . . . . . . . . . . . . . 81
4.1.2 Points rationnels de $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ . . . . . . . . . . . 81
4.2 Cas de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$ sur $\mathbf{Q}$ . . . . . . . . . . . . . . . 84
4.2.1 Théorème principal . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
4.2.2 Points quadratiques de type 1 . . . . . . . . . . . 87
4.2.3 Points quadratiques de type 2 . . . . . . . . . . . 88

**5 Estimations de sommes arithmétiques 95**

5.1 Une somme de fonctions $L$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 95
5.2 Démonstration de la proposition 4.12 . . . . . . . . . . . 105

**Bibliographie 109**

# INTRODUCTION

La géométrie diophantienne est un domaine de géométrie algébrique qui s'intéresse aux points rationnels ou algébriques des variétés définies sur un corps de nombres. Lorsque ces points sont denses pour la topologie de Zariski dans la variété considérée, il est naturel d'étudier leur répartition selon leur « taille » qui sera donnée par une hauteur. Plus précisément, considérons une variété projective lisse $X$ définie sur un corps de nombres $K$ de degré $d$, munie d'un fibré en droites ample $\mathcal{L}$ et d'une métrique adélique sur celui-ci. Une telle métrique permet de définir une hauteur sur l'ensemble des points rationnels $X(K)$, application à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ que nous noterons $H_{\mathcal{L},K}$. Nous disposons également d'une hauteur dite absolue définie sur l'ensemble des points algébriques $X(\bar{\mathbf{Q}})$ et que nous noterons $H_{\mathcal{L}}$. Toutes ces notions seront définies au chapitre 1. Par ailleurs, si $x$ est un point algébrique de la variété $X$, nous pouvons définir le degré sur $K$ de celui-ci comme le degré de son corps résiduel sur le corps $K$. La propriété de finitude de Northcott nous dit alors que, pour tout nombre réel $B \geqslant 0$ et tout entier $m \geqslant 1$, l'ensemble

$$\{x \in X(\bar{K}) \mid \deg_K(x) = m \text{ et } H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant B\}$$

est fini. Dans cette thèse, nous souhaitons étudier le comportement asymptotique du cardinal de cet ensemble, lorsque la borne $B$ tend vers l'infini, dans certains cas particuliers.

La première variété qui fut l'objet de ces études est l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ lui-même. Il en général muni de la hauteur absolue $H_n$ sur $\mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$ provenant de la métrique adélique dite usuelle sur le fibré en droites ample $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$. Il est alors question d'étudier

$$N(\mathbf{P}^n, K, m, B) = \#\{x \in \mathbf{P}^n(\bar{K}) \mid \deg_K(x) = m \text{ et } H_n(x) \leqslant B\}$$

lorsque $B$ tend vers l'infini. Dans sa thèse de 1963 (qui a fait l'objet d'une note [33] en 1964 puis d'un article [34] publié en 1979), Schanuel étudie le cas $m = 1$ des points rationnels et montre que

$$N(\mathbf{P}^n, K, 1, B) = S_K(n) B^{d(n+1)} + O(B^{d(n+1)-1} \log B)$$

où le facteur $\log B$ du terme d'erreur peut être omis si $(d, n) \neq (1, 1)$. La constante du terme principal est explicite et vaut

$$S_K(n) = (n+1)^{r_K + s_K - 1} \left( \frac{2^{r_K} (2\pi)^{s_K}}{\sqrt{|\Delta_K|}} \right)^{n+1} \frac{h_K R_K}{w_K \zeta_K(n+1)},$$

où $r_K$ est le nombre de plongements réels de $K$ dans $\mathbf{C}$, $s_K$ le nombre de paires de plongements imaginaires conjugués de $K$ dans $\mathbf{C}$, $\Delta_K$ le discriminant de $K$, $h_K$ le nombre de classes d'idéaux de $K$, $w_K$ le nombre de racines de l'unité de $K$, $R_K$ le régulateur de $K$ et $\zeta_K$ la fonction zêta du corps de nombres $K$. Ce résultat a ensuite été généralisé par Peyre à toute hauteur adélique, comme conséquence du corollaire 6.2.18 et de la proposition 3.3 de [31].

**Théorème 1** (Peyre [31])**.** *Soit $H$ une hauteur sur $\mathbf{P}^n(K)$ associée à une métrique adélique sur le fibré anticanonique $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(n+1)$. Alors, pour tout ensemble ouvert $U$ non vide de $\mathbf{P}^n$*

$$\#\{x \in U(K) \mid H(x) \leqslant B\} \underset{B \to +\infty}{\sim} C_H(\mathbf{P}^n) B$$

*et $C_H(\mathbf{P}^n) > 0$ est explicite.*

Dans le cas des points algébriques de degré $m \geqslant 2$, plusieurs résultats sont également connus. Ainsi Schmidt ([36],1995) s'est intéressé aux points quadratiques sur $\mathbf{Q}$ et a montré que

$$N(\mathbf{P}^1, \mathbf{Q}, 2, B) = \frac{8}{\zeta(3)} B^6 + O(B^4 \log B),$$

$$N(\mathbf{P}^2, \mathbf{Q}, 2, B) = \frac{24 + 2\pi^2}{\zeta(3)^2} B^6 \log B + O(B^6 \sqrt{\log B})$$

et que pour tout $n \geqslant 3$, il existe un nombre réel explicite $c_{n,2} > 0$ tel que

$$N(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}, 2, B) = c_{n,2} B^{2(n+1)} + O(B^{2n+1}).$$

Dans sa thèse, Gao ([19], 1995) a poursuivi ce travail en considérant les points de degré au moins 3. Il obtient, lorsque $n > m \geqslant 3$,

$$N(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}, m, B) = c_{n,m} B^{m(n+1)} + O(B^{m(n+1)-1}),$$

avec $c_{n,m} > 0$. En revanche si $1 \leqslant n \leqslant m$, et toujours $m \geqslant 3$, il obtient seulement un ordre de grandeur

$$N(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}, m, B) = \mathrm{e}^{O(1)}\, B^{m(m+1)}.$$

Ainsi, sur le corps $\mathbf{Q}$, le cas $n \leqslant m$ se distingue du cas $n > m$. Cette dichotomie est également présente chez Widmer ([41], 2009) qui a étudié le cas général : il obtient un équivalent asymptotique de $N(\mathbf{P}^n, K, m, B)$ lorsque $n > \frac{5}{2}m + 4 + 2(dm)^{-1}$, où $d = [K : \mathbf{Q}]$. Enfin, Masser et Vaaler ([26], 2007) ont montré que pour tout corps de nombres $K$ et tout entier $m \geqslant 2$,

$$N(\mathbf{P}^1, K, m, B) = c_{1,m,K} B^{m(m+1)} + O(B^{m(m+1)-1}\mathfrak{L}),$$

où $c_{1,m,K} > 0$, $\mathfrak{L} = \log B$, si $(m, K) = (2, \mathbf{Q})$ et $\mathfrak{L} = 1$, sinon. Hormis le cas de la droite projective $\mathbf{P}^1$, ces résultats sont obtenus par une même méthode. Celle-ci consiste à voir les points de degré $m$ comme des points rationnels d'une certaine extension de degré $m$. À extension fixée, on détermine ensuite une estimation du nombre de points de hauteur bornée engendrant cette extension (on pourra consulter [36] ou [43] par exemple). Le résultat est alors obtenu en sommant sur toutes les extensions. Une des difficultés est d'obtenir un « bon » terme d'erreur à la deuxième étape.

Le premier enjeu de cette thèse sera d'aborder ce problème sous un nouvel angle s'appuyant sur des aspects géométriques et non plus uniquement algébriques. En effet, si $X$ est une variété projective sur $K$, on peut considérer l'application, qui à un point $x \in X(\bar{K})$ de degré $m$ sur $K$, associe l'image du $m$-uplet $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m(\bar{K})$, formé des conjugués de $x$, dans la variété projective quotient $X^m/\mathfrak{S}_m$. Alors l'image de cette application est contenue dans l'ensemble des points rationnels sur $K$ de $X^m/\mathfrak{S}_m$. Ceci nous permet de voir un point algébrique de $X$ de degré $m$ sur $K$ comme un point rationnel sur $K$ d'une variété auxiliaire $X^m/\mathfrak{S}_m$, appelée le produit symétrique $m$-ième de $X$. C'est une variété projective notée $\mathrm{Sym}^m X$. Ce point de vue met en lumière la dimension géométrique du problème et le place dans un domaine de géométrie arithmétique très étudié. En effet, le comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée est l'objet d'une conjecture, connue sous le nom de conjecture de Manin, et initialement proposée par Batyrev et Manin en 1990 [3]. Celle-ci peut-être formulée de la manière suivante.

**Conjecture 2** (Batyrev – Manin, [3])**.** *Soit $X$ une variété projective lisse de Fano, définie sur $K$. On munit le fibré anticanonique $\omega_X^{-1}$ d'une métrique adélique et la hauteur associée sur $X(K)$ sera notée $H_{\omega_X^{-1},L}$. Alors il existe une extension finie $L$ de $K$, un ensemble ouvert non vide $U$ de $X$ et un nombre réel $c > 0$ tels que*

$$\#\{x \in U(L) \mid H_{\omega_X^{-1},L}(x) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} cB(\log B)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic} X-1}.$$

Cette conjecture a ensuite été précisée par Peyre en 1995 [31], qui a donné une expression conjecturale de la constante $c$. Sous cette forme, la conjecture a été démontrée pour de nombreuses variétés. Le théorème 1 traite le cas de l'espace projectif. Remarquons qu'il n'est dans ce cas pas nécessaire de se restreindre à un ensemble ouvert de $\mathbf{P}^n$ ni d'étendre le corps de base et que de plus, les points de $\mathbf{P}^n(K)$ de hauteur bornée vérifient la même estimation sur tout ouvert non vide de $\mathbf{P}^n$. La conjecture 2 est également connues pour les variétés toriques [5], les variétés de drapeaux [18] ou encore les compactifications équivariantes du groupe additif [10].

Cependant, cette conjecture n'est pas vraie en général. Le premier contre-exemple a été exhibé par Batyrev et Tschinkel [4] et montre que la conjecture est incompatible avec les familles de variétés. S'il est toujours nécessaire de pouvoir écarter certains sous-ensembles sur lesquels il y aurait des phénomènes d'accumulations des points rationnels, il est trop restrictif de demander que ces ensembles exceptionnels soient uniquement les points rationnels de fermés stricts. En suivant une suggestion de Peyre, nous considérerons la conjecture suivante.

**Conjecture 3.** *Soit $X$ une variété projective lisse, définie sur $K$ et dont le fibré anticanonique $\omega_X^{-1}$ est gros. On munit ce fibré d'une métrique adélique. Alors il existe une extension finie $L$ de $K$, un ensemble mince $Z \subset X(L)$ et un nombre réel $c > 0$ tels que*

$$\#\{x \in X(L) - Z \mid H_{\omega_X^{-1},L}(x) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} cB(\log B)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic} V-1}.$$

Un ensemble est mince s'il est l'image des points rationnels d'une certaine variété, par un morphisme génériquement fini sans section rationnelle. Cette notion généralise les ensembles de points rationnels d'un fermé strict, en prenant comme morphisme l'inclusion. Ainsi, la conjecture 2 sera aussi appelée *conjecture 3 forte*.

Dans le chapitre 2, dont une partie du contenu est issu de l'article [25], nous nous concentrerons sur le cas des courbes projectives, en particulier de la droite projective $\mathbf{P}^1$. En effet, le $m$-ième produit symétrique de $\mathbf{P}^1$ est tout simplement l'espace projectif $\mathbf{P}^m$. Ainsi, le théorème 1 nous permet de donner, très facilement, une généralisation du théorème de Masser et Vaaler tout en interprétant la constante du terme principal de manière géométrique, à l'aide de volumes pour une certaine mesure définie par Peyre. Nous en déduisons également la distribution des points algébriques d'une courbe rationnelle.

Lorsque la variété $X$ est une surface projective lisse de Fano, le produit symétrique $\operatorname{Sym}^m X$ n'est pas lisse pour $m \geqslant 2$. Cependant une résolution des singularités est connue, donnée par le morphisme birationnel de Hilbert-Chow

$$\varepsilon\colon\ \operatorname{Hilb}^m X \to \operatorname{Sym}^m X$$

où $\operatorname{Hilb}^m$ est le schéma de Hilbert de $m$ points sur $X$, variété projective lisse. Dans le chapitre 3, nous étudierons donc la conjecture 3 pour la variété $\operatorname{Hilb}^m X$ munie d'une certaine hauteur. Nous donnerons les propriétés géométriques de ce schéma de Hilbert nécessaires à l'énoncé de la conjecture et à la définition de la constante de Peyre, à savoir le fibré anticanonique, le groupe de Picard et le cône effectif. Nous montrerons également que les conjectures fortes sur $X$ et sur $\operatorname{Hilb}^m X$ sont en général incompatibles (corollaire 3.15), ce qui donne de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Manin 2. Les résultats du chapitre 2 nous serviront à montrer que les produits symétriques de certaines courbes rationnelles peuvent être accumulateurs (proposition 3.16), sans pour autant constituer de contre-exemple à la conjecture 2 (proposition 3.17). Nous étudions également le cas des points quadratiques sur les courbes de genre supérieur.

Enfin, dans le chapitre 4, nous étudierons plus précisément les cas des surfaces $\mathbf{P}^2$ et $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Pour la première, nous verrons comment le résultat de Schmidt pour les points quadratiques de $\mathbf{P}^2$ permet de montrer la conjecture 2 sur $\operatorname{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$, pour une certaine hauteur (théorème 4.2). L'ensemble exceptionnel de notre théorème contient un sous-ensemble $Y$ mince et dense dont la contribution est du même ordre de grandeur que l'estimation de la conjecture 2. Si nous n'écartons pas ce sous-ensemble $Y$, nous obtenons que la conjecture 2 est vraie pour $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$, mais la constante du terme principal n'est pas celle définie par Peyre. Pour finir, nous montrerons que $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$ vérifie la conjecture 3 et constitue un contre-exemple à la conjecture 2. En effet, nous allons montrer la conjecture 1.24 avec $Z$ un ensemble mince et dense de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ strictement accumulateur, dont nous déterminerons précisément la contribution. L'ensemble $Z$ sera une union disjointe $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$, avec $Z_3$ le fermé strict de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$ au-dessus du lieu singulier de $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$, $Z_1 \subset \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ un ensemble mince et dense et $Z_2 \subset \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ un ensemble mince inclus, lui, dans une sous-variété stricte de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$. Nous montrerons alors, pour une certaine hauteur anticanonique $H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$, le théorème suivant (théorème 4.4).

**Théorème 4.** *Il existe des nombres réels explicites et strictement positifs $c_1$, $c_2$ et $c_3$ tels que*

1. *pour tout ensemble ouvert non vide $U$ de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$,*
$$\#\{z\in U(\mathbf{Q})\cap Z_1 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z)\leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c_1 B\log^3 B;$$
2. *lorsque $B$ tend vers l'infini,*
$$\#\{z\in Z_2(\mathbf{Q}) \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z)\leqslant B\}\sim c_2 B^{3/2};$$
3. *lorsque $B$ tend vers l'infini,*
$$\#\{z\in \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})-Z \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z)\leqslant B\}\sim c_3 B\log^2 B$$
*où $c_3$ est la constante définie par Peyre pour la hauteur $H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}$ et vaut*
$$c_3=\frac{1}{4}(16+\pi^2)\prod_{p\ premier}\left(1-\frac{7}{p^3}+\frac{1}{p^4}-\frac{1}{p^7}\right).$$

Le contre-exemple à la conjecture forte est donné par l'ensemble mince et dense $Z_1$ et porte sur la puissance du $\log B$, comme dans le contre-exemple de Batyrev-Tschinkel.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons la méthode généralement employée et nous baserons plus particulièrement sur le travail de

Schmidt [36] sur les points quadratiques. Nous commencerons par déterminer le nombre de points quadratique de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ définis sur une certain corps quadratique $L$, c'est-à-dire une version améliorée du théorème de Schanuel dans lequel la dépendance en $L$ est précisée dans le terme d'erreur. La deuxième étape est de sommer sur tous les corps quadratiques $L$ les constantes du terme principal et du terme d'erreur. La borne de Silverman sur le discrimant montre que ces sommes sont finies. Ces sommes seront calculées au chapitre 5. La démonstration utilise le résultat suivant.

**Théorème 5.** *Soit, pour $\Delta$ un discriminant d'un corps quadratique, la fonction $L$ de Dirichlet donnée par*

$$L(s,\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{n}\right) n^{-s},$$

*où $\left(\frac{\Delta}{n}\right)$ est le symbole de Kronecker. Alors pour tout $\delta > 0$,*

$$\sum_{|\Delta| \leqslant Y} \frac{L(1,\Delta)^2}{L(2,\Delta)^2} = \zeta(2)^2 \prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right) Y + O\left(Y^{5/6+\delta}\right).$$

## Notations

Nous introduisons ici les notations valables pour l'ensemble de ce texte.

Soit $K$ un corps de nombres de degré $d$. Nous noterons $M_K$ l'ensemble des places de $K$, $M_{K,f}$ l'ensemble des places finies de $K$ et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers algébriques de $K$. De plus, $r_K$ désignera le nombre de plongements réels de $K$, $s_K$ le nombre de paires de plongements complexes conjugués de $K$, $\Delta_K$ le discriminant de $K$, $h_K$ le nombre de classes d'idéaux de $K$, $w_K$ le nombre de racines de l'unité de $K$, $R_K$ le régulateur de $K$ et $\zeta_K$ la fonction zêta du corps de nombres $K$.

L'ensemble $M_{\mathbf{Q}}$ sera identifié à l'ensemble

$$\{p \mid p = \infty \text{ ou } p \text{ nombre premier}\};$$

nous noterons $|\cdot|_\infty$ la restriction à $\mathbf{Q}$ de la valeur absolue usuelle de $\mathbf{R}$ et $|\cdot|_p$, si $p$ est un nombre premier, la valeur absolue $p$-adique vérifiant $|p|_p = \frac{1}{p}$. Nous définissons alors $\mathbf{Q}_p$ comme le complété de $\mathbf{Q}$ pour la topologie donnée par valeur absolue $|\cdot|_p$. Sa clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_p$ possède une unique valeur absolue prolongeant $|\cdot|_p$, qui sera toujours notée $|\cdot|_p$. Si $p = \infty$, $\mathbf{Q}_p = \mathbf{R}$ et $\bar{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{C}$ est complet et algébriquement clos. Si $p$ est un nombre premier, ce n'est pas le cas, mais le complété $\mathbf{C}_p$ de $(\bar{\mathbf{Q}}_p, |\cdot|_p)$ est, lui, algébriquement clos. Le prolongement de la valeur absolue $|\cdot|_p$ de $\bar{\mathbf{Q}}_p$ à $\mathbf{C}_p$ sera toujours noté $|\cdot|_p$.

Lorsque $K$ est un corps de nombres quelconque, nous noterons $|\cdot|_v$ le représentant de la place $v \in M_K$ dont la restriction à $\mathbf{Q}$ est l'une des valeurs absolues sur $\mathbf{Q}$ définies ci-dessus et nous noterons $p_v$ la place de $\mathbf{Q}$ correspondante. Ces valeurs absolues sont de la forme $x \mapsto |\sigma(x)|_{p_v}$ où $\sigma$ est un plongement de $K$ dans $\mathbf{C}_{p_v}$. Comme précédemment, $K_v$ désignera le complété de $K$ pour la topologie induite par $v$ et $\mathbf{C}_v$ le complété de la clôture algébrique de $K_v$. Le nombre $d_v$ de plongements de $K$ dans $\mathbf{C}_{p_v}$ est alors égal au degré $[K_v : \mathbf{Q}_{p_v}]$.

Ces valeurs absolues vérifient la *formule du produit* : pour tout $x \in K^*$,

$$\prod_{v \in M_K} |x|_v^{d_v} = 1. \tag{1}$$

# CHAPITRE 1

---

# HAUTEURS ADÉLIQUES ET CONJECTURE DE MANIN

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler la notion de métrique adélique sur un fibré en droites d'une variété projective. Une telle métrique permet de définir une hauteur sur l'ensemble des points algébriques de la variétés. Nous en donnerons quelques propriétés classiques.

Enfin, nous énoncerons une variante de la conjecture de Manin, portant sur le nombre de points rationnels de hauteur bornée, et verrons le lien géométrique de celle-ci avec le problème de la répartition des points algébriques de hauteur bornée.

Dans tout ce chapitre, on considère une variété projective $V$ définie sur un corps de nombres $K$ de degré $d$ et munie d'un fibré en droites $\mathcal{L}$.

## 1.1 Fibrés en droites adéliquement métrisés

Nous commençons ici par rappeler la notion de métrique adélique sur le fibré en droites $\mathcal{L}$ comme définie par S. Zhang [44] ou encore [31].

### 1.1.1 Métriques sur un fibré en droites

**Définition 1.1.** Une *métrique sur* $\mathcal{L}$ est la donnée, pour toute place $v$ sur $K$, d'une application qui à tout point $x \in V(\mathbf{C}_v)$ associe une norme $\|\cdot\|_v$ sur $\mathcal{L}(x) = \mathbf{C}_v \otimes_{\mathcal{O}_{V,x}} \mathcal{L}_x$ telle que, pour tout ensemble ouvert $U$ de $V$ et toute section $s \in \Gamma(U, \mathcal{L})$,

1. l'application $x \mapsto \|s(x)\|_v$ soit continue sur $U(\mathbf{C}_v)$ pour la topologie $v$-adique ;
2. pour tout $x \in U(\mathbf{C}_v)$ et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$,

$$\|\sigma(s)(x)\|_v = \|s(x^\sigma)\|_v \,.$$

**Remarque 1.2.** Ici, on se fixe un plongement $V \subset \mathbf{P}^n$ et les actions du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$ sur $\mathbf{C}_v \otimes \Gamma(U, \mathcal{L})$ et sur $U(\mathbf{C}_v)$ sont données, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$, tout $s = \sum_i c_i \otimes f_i \in \mathbf{C}_v \otimes \Gamma(U, \mathcal{L})$ et tout point $x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in U(\mathbf{C}_v)$, par

$$\sigma(s) := \sum_i \sigma(c_i) \otimes f_i$$

et

$$x^\sigma := [\sigma^{-1}(x_0) : \sigma^{-1}(x_1) : \ldots : \sigma^{-1}(x_n)],$$

respectivement.

**Exemple 1.3.** Si $\mathcal{L}$ est très ample et $(s_1, \ldots, s_q)$ est une base de $\Gamma(V, \mathcal{L})$, les normes $\|\cdot\|_v$ définies, pour tout $x \in V(\mathbf{C}_v)$ et pour toute section $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ ne s'annulant pas en $x$, par

$$\|s(x)\|_v = \left( \max_{1 \leqslant i \leqslant q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1},$$

donnent une métrique sur $\mathcal{L}$, que nous appellerons *métrique usuelle* pour la base $(s_1, \ldots, s_q)$.

L'ensemble des métriques est muni de plusieurs opérations, dont le produit et le tiré en arrière que nous décrivons maintenant.

**Métrique produit** — Étant données deux métriques $(\|\cdot\|_{1,v})_{v \in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{2,v})_{v \in M_K}$ sur des fibrés en droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement, nous pouvons munir le fibré en droites $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ d'une métrique adélique produit donnée, pour tout ensemble ouvert $U$ de $V$, toutes sections $s_1 \in \Gamma(U, \mathcal{L}_1)$ et $s_2 \in \Gamma(U, \mathcal{L}_2)$ et tout $x \in U(\mathbf{C}_v)$, par

$$\|s_1 \otimes s_2(x)\|_v = \|s_1(x)\|_{1,v} \, \|s_2(x)\|_{2,v} \,.$$

**Métrique tirée en arrière** — Soient $V$ et $V'$ deux variétés projectives et $f\colon V' \to V$ un morphisme. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $V$ muni d'une métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$. Alors, pour tout $x \in V'$,

$$(f^*\mathcal{L})(x) = \mathcal{L}(f(x)).$$

De plus, l'application $V'(\mathbf{Q}_v) \to V(\mathbf{Q}_v)$ induite par $f$ est continue pour toute place $v$. Par conséquent, le fibré en droites $f^*\mathcal{L}$ sur $V'$ est naturellement muni d'une métrique donnée, pour tout ensemble ouvert $U$ de $V$, toute section $s \in \Gamma(U, \mathcal{L})$ et tout $x \in f^{-1}(U)(\mathbf{C}_v)$, par

$$\|(f^*s)(x)\|_v = \|s(f(x))\|_v\,.$$

### 1.1.2 Métriques adéliques sur un fibré très ample

Une métrique adélique sur un fibré en droites $\mathcal{L}$ est une métrique qui vérifie une condition supplémentaire, de nature globale. Nous commençons par le cas où $\mathcal{L}$ est très ample.

**Définition 1.4.** Supposons $\mathcal{L}$ très ample. Soient $(s_0, \ldots, s_n)$ une base de l'espace des sections globales $\Gamma(V, \mathcal{L})$ et $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ une métrique sur $\mathcal{L}$. Notons, pour tout $x \in V(\mathbf{C}_v)$,

$$\delta_v(x) = \log\left(\|s(x)\|_v \max_{0\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{s_i(x)}{s(x)}\right|_v\right),$$

où $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ est une section quelconque ne s'annulant pas en $x$. La métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ sera dite *adélique* si

1. Pour toute place $v \in M_K$, la fonction $\delta_v$ est bornée sur $V(\mathbf{C}_v)$ ;
2. Pour presque toute place $v \in M_K$, $\delta_v = 0$.

La condition 1 n'est pas vide puisque, même si $V$ est projective, $V(\mathbf{C}_v)$ n'est pas compact si $v$ n'est pas archimédienne. Le lemme suivant assure, en particulier, que cette définition ne dépend pas de la base de $\Gamma(\mathcal{L}, V)$ choisie.

**Lemme 1.5.** *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample sur $V$ muni d'une métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$. Soient $(s_0, \ldots, s_n)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L})$ et $(\tau_0, \ldots, \tau_q)$ une famille de sections de $\Gamma(V, \mathcal{L})$ sans point base sur $V$. Pour $x \in V(\mathbf{C}_v)$*

*et $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ non nulle en $x$, on note*

$$\epsilon_v(x) = \log\left(\|s(x)\|_v \max_{0\leqslant j\leqslant q}\left|\frac{\tau_j(x)}{s(x)}\right|_v\right).$$

*Alors, $\delta_v - \epsilon_v$ est bornée pour toute place $v$ et nulle pour presque toute place $v$.*

*Démonstration.* On a un plongement $\varphi\colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ tel que $\mathcal{L} = \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ et pour tout $i$, une section $y_i$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ correspondant à la $i$-ième coordonnée homogène et telle que $s_i = \varphi^* y_i$. Alors, pour tout $j$,

$$\tau_j = \varphi^*(\phi_j(y_0, \ldots, y_n)),$$

où les $\phi_j$ sont des formes linéaires en $(y_0, \ldots, y_n)$. On a alors, pour tout $x \in V(\mathbf{C}_v)$,

$$(\delta_v - \epsilon_v)(x) = \log\left(\frac{\max_{0\leqslant i\leqslant n}|y_i|_v}{\max_{0\leqslant j\leqslant q}|\phi_j(y_0, \ldots, y_n)|_v}\right),$$

où $y = \varphi(x)$, de coordonnées homogènes $[y_0 : \ldots : y_n]$.
Notons, pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$,

$$\phi_j = a_{0,j}y_0 + a_{1,j}y_1 + \cdots + a_{n,j}y_n,$$

avec $a_{i,j} \in K$ pour tout $(i, j)$. Alors, pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$,

$$|\phi_j(y_0, \ldots, y_n)|_v \leqslant c_v \max_{0\leqslant i\leqslant n}|y_i|_v,$$

avec

$$c_v = \begin{cases} \max\limits_{i,k}\left\{\,|a_{i,k}|_v\,\right\}, & \text{si } v \text{ est ultramétrique}\,; \\ \max\limits_{k}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}|a_{i,k}|_v\right), & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi,

$$(\delta_v - \epsilon_v)(x) \geqslant \log\left(\frac{1}{c_v}\right),$$

et de plus, $c_v = 1$ pour presque toute place $v$.
Pour l'inégalité inverse, notons $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes homogènes définissant la variété $\varphi(V)$, c'est-à-dire $\varphi(V) = \mathcal{V}(P_1, \ldots, P_r)$. Puisque le

système $(\tau_0, \dots, \tau_q)$ est sans point base,

$$\mathcal{V}(P_1, \dots, P_r, \phi_0, \dots, \phi_q) = \varnothing.$$

Par le théorème des zéros de Hilbert dans sa version homogène, il existe un entier naturel non nul $t$ et des polynômes homogènes $G_{i,j}$, $H_{i,j}$ tels que

$$y_i^t = \sum_{j=1}^{r} G_{i,j}(y) P_j(y) + \sum_{j=0}^{q} H_{i,j}(y)\phi_j(y),$$

pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ et tout $y \in \mathbf{P}^n$. Alors pour tout point $y = [y_0 : \dots : y_n] \in \varphi(V)$,

$$y_i^t = \sum_{j=0}^{q} H_{i,j}(y)\phi_j(y).$$

Ainsi, les $H_{i,j}$ sont de degré $t-1$ et nous obtenons, sur $\varphi(V)(\mathbf{C}_v)$,

$$|y_i|_v^t \leqslant c'_v \max_{0 \leqslant \ell \leqslant n} |y_\ell|_v^{t-1} \max_{0 \leqslant j \leqslant q} |\phi_j(y)|_v\,,$$

avec

$$c'_v = \begin{cases} \max\limits_{\ell,j} \left( \max \left\{ |h|_v\,,\ h \text{ coefficient de } H_{\ell,j} \right\} \right), & \text{si } v \text{ est ultramétrique} \\[2ex] \max\limits_{\ell} \left( \displaystyle\sum_{j=0}^{q} \sum_{\substack{h \text{ coefficient} \\ \text{de } H_{\ell,j}}} |h|_v \right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i|_v \leqslant c'_v \max_{0 \leqslant j \leqslant q} |\phi_j(y)|_v\,,$$

et donc,

$$(\delta_v - \epsilon_v)(x) \leqslant \log\left(\frac{1}{c'_v}\right),$$

avec $c'_v = 1$ pour presque toute place $v$.

□

**Remarque 1.6.** 1. La *métrique usuelle* définie dans l'exemple 1.3 est adélique.

2. Si $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ est une métrique sur un fibré en droites $\mathcal{L}$ très ample, la continuité de $\delta_v$ implique la condition de continuité de la métrique

dans la définition 1.1.

Enfin, signalons une propriété importante des métriques adéliques.

**Proposition 1.7.** *Si $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ est une métrique adélique sur $\mathcal{L}$, $x$ est un point de $V(\bar{\mathbf{Q}})$ et $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ ne s'annule pas en $x$, alors $\|s(x)\|_v = 1$, sauf pour un nombre fini de places $v \in M_K$.*

### 1.1.3 Métriques adéliques sur un fibré quelconque

Si $\mathcal{L}$ n'est pas très ample, il est tout de même toujours possible de l'écrire sous la forme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des fibrés en droites très amples sur $V$ (cela se déduit du fait que si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites et $\mathcal{M}$ un fibré en droites très ample, il existe un entier $k > 0$ tel que le fibré $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{\otimes k}$ soit très ample ; voir [37, page 22]). Nous définissons alors une métrique adélique sur un fibré en droites $\mathcal{L}$ quelconque de la manière suivante.

**Définition 1.8.** Soit $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur la variété projective $V$ muni d'une métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$. Cette métrique sera dite *adélique* s'il existe deux fibrés en droites très amples $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ munis de métriques adéliques $(\|\cdot\|_{1,v})_{v\in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{2,v})_{v\in M_K}$, respectivement, tels que

1. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ ;
2. la métrique $(\|\cdot\|_{1,v})_{v\in M_K}$ est la métrique produit de $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{2,v})_{v\in M_K}$ sur $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_2$.

Ces définitions sont compatibles au produit et au tiré en arrière de métriques, comme le montrent les deux propositions suivantes.

**Proposition 1.9.** *Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux fibrés en droites sur $V$ munis de métriques adéliques. Alors la métrique produit induite sur $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ est également adélique.*

*Démonstration.* Supposons $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ très amples et munis des métriques adéliques $(\|\cdot\|_{v,1})_{v\in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{v,2})_{v\in M_K}$, respectivement. Nous noterons $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ la métrique produit sur $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$. Soit $(s_0, \dots, s_n)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L}_1)$, soit $(\tau_0, \dots, \tau_m)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L}_2)$ et soient $\varphi_1 \colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ et $\varphi_2 \colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^m$ des plongements tels que $\varphi_1^* x_i = s_i$ et $\varphi_2^* x'_j = \tau_j$, pour tous $i, j$, où $x_i$ (respectivement $x'_i$) désigne la section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ (respectivement $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)$) correspondant à la $i$-ème coordonnée homogène. Le plongement de Segre $\phi\colon \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \hookrightarrow \mathbf{P}^{nm+n+m}$ induit un plongement

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & V & \longrightarrow & \mathbf{P}^{nm+n+m} \\ & x & \longmapsto & \phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{array}$$

tel que

$$\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{nm+n+m}}(1) = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2.$$

Par conséquent, le fibré en droites $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ est également très ample et $\Gamma(V, \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$ est engendré par les sections $s_i \otimes \tau_j$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$. Soit alors, pour $s \in \Gamma(V, \mathcal{L}_1)$, $\tau \in \Gamma(V, \mathcal{L}_2)$ et $x \in V(\mathbf{C}_v)$,

$$\delta_v(x) = \log\left(\|s \otimes \tau(x)\|_v \max_{i,j} \left|\frac{s_i \otimes \tau_j(x)}{s \otimes \tau(x)}\right|_v\right).$$

On a

$$\delta_v(x) = \underbrace{\log\left(\|s(x)\|_v \max_i \left|\frac{s_i(x)}{s(x)}\right|_v\right)}_{\delta_{v,1}(x)} + \underbrace{\log\left(\|\tau(x)\|_v \max_j \left|\frac{\tau_j(x)}{\tau(x)}\right|_v\right)}_{\delta_{v,2}(x)}.$$

Les métriques $(\|\cdot\|_{v,1})_{v \in M_K}$ et $(\|\cdot\|_{v,2})_{v \in M_K}$ étant adéliques, les fonctions $\delta_{v,1}$ et $\delta_{v,2}$ sont bornées pour toute place et nulles pour presque toute place. C'est donc également le cas pour la fonction $\delta_v$ et la métrique $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ est adélique.
Le cas général s'en déduit alors facilement en remarquant que si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2^{-1}$ et $\mathcal{L}_2 = \mathcal{M}_3 \otimes \mathcal{M}_4^{-1}$, pour des fibrés en droites très amples $\mathcal{M}_i$, alors

$$\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_3) \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_4)^{-1}.$$

□

**Proposition 1.10.** *Soient $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $V$ muni d'une métrique adélique et $f\colon V' \to V$ un morphisme de variétés projectives. Alors la métrique induite sur $f^*\mathcal{L}$ est adélique.*

*Démonstration.* Comme précédemment, il suffit de traiter le cas où $\mathcal{L}$ est très ample. Notons $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$ la métrique adélique sur $\mathcal{L}$. Le fibré en droites $\mathcal{L}' = f^*\mathcal{L}$ est muni de la métrique, toujours notée $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$, vérifiant, pour tout $x \in V'(\mathbf{C}_v)$ et toute $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$,

$$\|(f^*s)(x)\|_v = \|s(f(x))\|_v\,.$$

De plus, il existe un fibré en droites très ample $\mathcal{L}_1$ sur $V'$ tel que le produit tensoriel $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}_1$ soit très ample. On munit alors $\mathcal{L}_1$ d'une métrique adélique usuelle $(\|\cdot\|_{1,v})_{v \in M_K}$, définie dans l'exemple 1.3. Nous obtenons une métrique produit $(\|\cdot\|_{2,v})_{v \in M_K}$ sur le fibré $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}_1$. Montrons alors que cette dernière est adélique. Soient $(s_1, \ldots, s_n)$ une base de $\Gamma(V', \mathcal{L}_2)$, $(\tau_1, \ldots, \tau_q)$ une base de $\Gamma(V', \mathcal{L}_1)$ et $(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ une base de $\Gamma(V, \mathcal{L})$. Alors la famille $(f^*\sigma_i \otimes \tau_j)_{i,j}$ de sections de $\mathcal{L}_2$ est sans point base. Notons, pour $x \in V'(\mathbf{C}_v)$ et $s = f^*\sigma \otimes \tau \in \Gamma(V', \mathcal{L}_2)$ non nulle en $x$,

$$\delta_v(x) = \log\left(\|s(x)\|_{2,v} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|\frac{s_i(x)}{s(x)}\right|_v\right)$$

et

$$\epsilon_v(x) = \log\left(\|s(x)\|_{2,v} \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \left|\frac{(f^*\sigma_i \otimes \tau_j)(x)}{s(x)}\right|_v\right).$$

D'après le lemme 1.5, $\delta_v - \epsilon_v$ est bornée pour toute place et nulle pour presque toute place. De plus,

$$\epsilon_v(x) = \log\left(\|\sigma(f(x))\|_v \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \left|\frac{\sigma_i(f(x))}{\sigma(f(x))}\right|_v\right) + \log\left(\|\tau(x)\|_{1,v} \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \left|\frac{\tau_j(x)}{\tau(x)}\right|_v\right).$$

Les métriques sur $\mathcal{L}$ et sur $\mathcal{L}_1$ étant adéliques, la fonction $\epsilon_v$ est bornée pour toute place $v$ et nulle pour presque toute place. Par conséquent, $\delta_v$ est également adélique. □

## 1.2 Hauteurs associées à une métrique adélique

Soient $V$ une variété projective définie sur $K$ et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $V$. Nous supposerons à partir de maintenant que $\mathcal{L}$ est muni d'une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$. Nous définissons maintenant des hauteurs sur $V(K)$ et $V(\bar{\mathbf{Q}})$ relatives à cette métrique.

### 1.2.1 Définitions

Commençons par énoncer un lemme sur lequel reposent les définitions. Remarquons d'abord que si $L$ est une extension finie de $K$, toute métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ sur $\mathcal{L}$ induit une métrique adélique $(\|\cdot\|_w)_{w\in M_L}$ sur $\mathcal{L}\otimes_K L$, avec, pour toute $w\in M_L$ divisant $v\in M_K$, $\|\cdot\|_w=\|\cdot\|_v$.

**Lemme 1.11.** *Soient $V$ une variété projective définie sur $K$ et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $V$ muni d'une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_v$. Soient $x\in V(\bar{\mathbf{Q}})$, $L$ un corps de nombres tel que $x\in V(L)$ et $s$ une section locale de $\mathcal{L}$ ne s'annulant pas en $x$.*

1. *$\|s(x)\|_v=1$ sauf pour un nombre fini de places $v\in M_L$.*
2. *La quantité*
$$\prod_{v\in M_L}\|s(x)\|_v^{-[L_v:\mathbf{Q}_v]}$$
*est un produit fini et ne dépend pas du choix de la section $s$.*
3. *La quantité*
$$\prod_{v\in M_L}\|s(x)\|_v^{-[L_v:\mathbf{Q}_v]/[L:\mathbf{Q}]}$$
*ne dépend pas, de plus, du choix de $L$.*

*Démonstration.* La première partie vient du fait que, pour tout $a\in L^*$,
$$|a|_v=1$$
pour presque toute place (finie) $v\in M_L$. La deuxième partie découle de la formule du produit (1) énoncée en introduction. Enfin, si $F$ est une extension de $L$
$$\begin{aligned}\prod_{w\in M_F}\|s(x)\|_w^{-[F_w:\mathbf{Q}_{p_w}]/[F:\mathbf{Q}]}&=\prod_{v\in M_L}\prod_{\substack{w\in M_F\\ w|v}}\|s(x)\|_v^{-[F_w:\mathbf{Q}_{p_v}]/[F:\mathbf{Q}]}\\&=\prod_{v\in M_L}\|s(x)\|_v^{-[L_v:\mathbf{Q}_{p_v}]/[L:\mathbf{Q}]},\end{aligned}$$
compte tenu de la formule
$$\sum_{\substack{w\in M_F\\ w|v}}[F_w:L_v]=[F:L].$$
□

Nous pouvons maintenant définir une hauteur sur l'ensemble $V(K)$ des points rationnels de $V$ et une hauteur absolue, sur l'ensemble des points algébriques de $V$.

**Définition 1.12.** Soit $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ une métrique adélique sur le fibré en droites $\mathcal{L}$. La *hauteur* (exponentielle) $H_{\mathcal{L},K}$ sur $V(K)$ associée à cette métrique est donnée par

$$H_{\mathcal{L},K}(x) = \prod_{v\in M_K} \|s(x)\|_v^{-[K_v:\mathbf{Q}_v]},$$

où $s$ est une section locale de $\mathcal{L}$ ne s'annulant pas en $x$.

Si $x \in V(\bar{K})$ est défini sur une extension $L$ de $K$, nous pouvons considérer sa hauteur $H_{\mathcal{L},L}(x)$, mais celle-ci dépend de l'extension choisie. La partie 3 du lemme 1.11 permet de se débarrasser de ce problème.

**Définition 1.13.** Soit $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ une métrique adélique sur $\mathcal{L}$. La *hauteur absolue* (exponentielle) $H_{\mathcal{L}}$ sur $V(\bar{\mathbf{Q}})$ associée à cette métrique est donnée par

$$H_{\mathcal{L}}(x) = \prod_{v\in M_L} \|s(x)\|_v^{-[L_v:\mathbf{Q}_v]/[L:\mathbf{Q}]},$$

où $L$ est un corps de nombres tel que $x \in V(L)$ et $s \in \Gamma(V, \mathcal{L})$ ne s'annule pas en $x$.

**Remarque 1.14.** Si $H_{\mathcal{L}}$ et $H'_{\mathcal{L}}$ sont deux hauteurs associées à des métriques adéliques sur $\mathcal{L}$, alors la définition 1.4 assure qu'il existe des constantes strictement positives $c$ et $c'$ telles que, pour tout $x \in V(\bar{\mathbf{Q}})$,

$$cH'_{\mathcal{L}}(x) \leqslant H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant c'H'_{\mathcal{L}}(x).$$

**Exemple 1.15.** Soit $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ la base usuelle de $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$, correspondant aux coordonnées homogènes. La métrique usuelle est donnée, pour toute place $v$, tout $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$ et tout $s \in \mathbf{C}_v \otimes \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ne s'annulant pas en $x$, par

$$\|s(x)\|_v = \left(\max\left\{\left|\frac{s_0(x)}{s(x)}\right|_v, \ldots, \left|\frac{s_n(x)}{s(x)}\right|_v\right\}\right)^{-1}.$$

Soit $x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbf{P}^n(K)$ tel que $x_i \neq 0$. Alors $s_i$ ne s'annule pas en $x$ et on a

$$\|s_i(x)\|_v = \frac{|x_i|_v}{\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}},$$

d'où

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1),K}(x) &= \prod_{v \in M_K} \frac{\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}^{d_v}}{|x_i|_v^{d_v}} \\ &= \prod_{v \in M_K} \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}^{d_v} \end{aligned}$$

par la formule du produit (1). On retrouve la *hauteur usuelle* sur l'espace projectif, que nous noterons $H_{n,K}$. La hauteur absolue associée sera notée $H_n$.

**Exemple 1.16.** Une autre hauteur sur l'espace projectif souvent utilisée est celle donnée par la métrique usuelle sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ aux places finies, comme ci-dessus, et pour $v$ place infinie, tout $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C}_v)$ et toute section $s$ de $\mathbf{C}_v \otimes \Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$ ne s'annulant pas en $x$, par

$$\|s(x)\|_v = \left( \left| \frac{s_0(x)}{s(x)} \right|_v^2 + \cdots + \left| \frac{s_n(x)}{s(x)} \right|_v^2 \right)^{-1/2}.$$

La hauteur associée sur $\mathbf{P}^n(K)$ sera notée $H_{n,e,K}$ et la hauteur absolue sera notée $H_{n,e}$.

Citons maintenant quelques propriétés de ces hauteurs qui découlent directement des définitions.

### 1.2.2 Propriétés

**Proposition 1.17.** *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $V$ muni d'une métrique adélique. Alors, pour tout $x \in V(\bar{\mathbf{Q}})$ et tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$,*

$$H_{\mathcal{L}}(x^\sigma) = H_{\mathcal{L}}(x).$$

**Proposition 1.18.** *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux fibrés en droites sur $V$ muni de métriques adéliques. La hauteur donnée par la métrique adélique produit sur $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ vérifie, pour tout $x \in V(\bar{\mathbf{Q}})$*

$$H_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(x) = H_{\mathcal{L}}(x) H_{\mathcal{L}'}(x).$$

**Proposition 1.19.** *Soient $f\colon W \to V$ un morphisme et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $V$ muni d'une métrique adélique. La métrique adélique tirée en arrière de celle-ci sur le fibré en droites $f^*\mathcal{L}$ de $W$ induit une hauteur $H_{f^*\mathcal{L}}$ vérifiant, pour tout $x \in W(\bar{\mathbf{Q}})$,*

$$H_{f^*\mathcal{L}}(x) = H_{\mathcal{L}}(f(x)).$$

Enfin, ces hauteurs vérifient la propriété de finitude, aussi appelée *propriété de Northcott* suivante.

**Proposition 1.20** (Finitude)**.** *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur $V$ muni d'une métrique adélique. Alors, pour tout entier naturel $m \geqslant 1$ et tout nombre réel $B \geqslant 1$, l'ensemble*

$$\{x \in V(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = m \textit{ et } H_{\mathcal{L}}(x) \leqslant B\}$$

*est fini, où $\mathbf{Q}(x)$ désigne le corps résiduel de $V$ en $x$.*

*Démonstration.* Quitte à changer $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}^{\otimes k}$, pour un certain entier $k$, et la hauteur $H_{\mathcal{L}}$ en $H_{\mathcal{L}}^k$, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est très ample. Nous avons donc un plongement $\varphi\colon V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ tel que $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) = \mathcal{L}$. La métrique usuelle sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$ induit une métrique adélique sur $\mathcal{L}$, donnant la hauteur $H_n \circ \varphi$, où $H_n$ est la hauteur absolue usuelle sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ . D'après la remarque 1.14, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$H_{\mathcal{L}} \geqslant c\, H_n \circ \varphi.$$

Ainsi, on est ramené à montrer que l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = m \text{ et } H_n(x) \leqslant B\}$$

est fini, ce qui est exactement le théorème de Northcott [30] (on pourra aussi consulter, par exemple, [8] théorème 1.6.8.). □

En particulier, pour tout corps de nombres $K$ et toute hauteur $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)}$ sur $\mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}})$ relative au fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$, l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{P}^n(\bar{K}) : \ [K(x) : K] = m \text{ et } H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n(1)}}(x) \leqslant B\}$$

est fini. Nous noterons $N(\mathbf{P}^n, K, m, B)$ le cardinal de cet ensemble, lorsque la hauteur choisie est $H_n$, définie dans l'exemple 1.15. Plusieurs études ont déjà été menées pour donner une formule asymptotique de ce cardinal lorsque $B$ tend vers l'infini.

Le théorème de Schanuel, annoncé en 1964 et publié en 1979, résout le cas $m = 1$ des points rationnels sur $K$.

**Théorème 1.21** (Schanuel [33, 34]). *Lorsque $B$ tend vers l'infini, nous avons*

$$N(\mathbf{P}^n, K, 1, B) = S_K(n)B^{d(n+1)} + O(B^{d(n+1)-1}\log B)$$

*avec*

$$S_K(n) = (n+1)^{r_K+s_K-1}\left(\frac{2^{r_K}(2\pi)^{s_K}}{\sqrt{|\Delta_K|}}\right)^{n+1}\frac{h_K R_K}{w_K\zeta_K(n+1)}.$$

*De plus, le facteur $\log B$ du terme d'erreur peut être omis si $(d, n) \neq (1, 1)$.*

Citons également les résultats de Schmidt sur les points quadratiques et celui de Masser et Vaaler sur la droite projective auxquels nous reviendrons, respectivement au chapitre 4 et au chapitre 2.

**Théorème 1.22** (Schmidt [36]). *Lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$N(\mathbf{P}^1, \mathbf{Q}, 2, B) = \frac{8}{\zeta(3)}B^6 + O(B^4\log B),$$

$$N(\mathbf{P}^2, \mathbf{Q}, 2, B) = \frac{24 + 2\pi^2}{\zeta(3)^2}B^6\log B + O(B^6\sqrt{\log B})$$

*et pour tout $n \geqslant 3$, il existe un nombre réel explicite $c_{n,2} > 0$ tel que*

$$N(\mathbf{P}^n, \mathbf{Q}, 2, B) = c_{n,2}B^{2(n+1)} + O(B^{2n+1}).$$

**Théorème 1.23** (MASSER-VAALER [26]). *Soient $K$ un corps de nombres de degré $d$ et $m$ un entier non nul. On note*

$$N_K(B) = \#\{\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m \text{ et } H_1(\alpha) \leqslant B\}.$$

*Lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$N_K(B) = mV_{\mathbf{R}}(m)^{r_K}V_{\mathbf{C}}(m)^{s_K}S_K(m)B^{dm(m+1)} + O(B^{dm(m+1)-1}\mathfrak{L}),$$

*où*

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} \log(B) & \textit{si } (d,m) = (1,1) \textit{ ou } (d,m) = (1,2), \\ 1 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

*et $V_{\mathbf{R}}(m)$ et $V_{\mathbf{C}}(m)$ sont des constantes strictement positives définies comme suit*

$$V_{\mathbf{R}}(m) = (m+1)^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \prod_{i=1}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \frac{(2i)^{m-2i}}{(2i+1)^{m+1-2i}},$$

*et*

$$V_{\mathbf{C}}(m) = \frac{(m+1)^{m+1}}{((m+1)!)^2}.$$

*La constante $S_K(m)$ est la constante du théorème de Schanuel 1.21.*

Dans la suite, nous souhaitons aborder ce problème d'une manière différente de ce qui a été fait jusqu'à maintenant dans la littérature. Nous allons rapprocher celui-ci de la conjecture de Manin, c'est-à-dire du cas des points rationnels. Cependant, au lieu de voir les points algébriques sur $K$ d'une variété comme des points rationnels de cette même variété sur des extensions finies de $K$, nous allons voir ceux-ci comme des points rationnels sur $K$ de la variété produit symétrique.

## 1.3 Conjecture de Manin et produit symétrique

### 1.3.1 Énoncé de la conjecture

La conjecture de Manin propose une formule asymptotique pour le nombre de points rationnels de hauteur bornée d'une variété projective lisse définie sur un corps de nombres. Celle-ci a été énoncée par Batyrev et Manin dans [3] et complétée par Peyre dans [31].

Une version faible de cette conjecture, à considérer plutôt comme une question, peut être formulée de la manière suivante.

**Conjecture 1.24.** *Soit $V$ une variété projective lisse définie sur un corps de nombres $K$ et dont le fibré anticanonique $\omega_V^{-1}$ est gros. On se donne une métrique adélique sur le fibré en droites $\omega_V^{-1}$ et on notera $H_{\omega_V^{-1},K}$ la hauteur exponentielle sur $V(K)$ associée. Alors il existe une extension* *finie $L$ de $K$ et un ensemble mince $Z \subset V(L)$ tels que*

$$\#\{x \in V(L) - Z \mid H_{\omega_V^{-1},L}(x) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} C_{H_{\omega_V^{-1},L}}(V)\, B(\log B)^{\operatorname{rg}\operatorname{Pic}(V)-1},$$

*où $C_{H_{\omega_V^{-1},L}}(V)$ est la constante définie par Peyre dans [31].*

Nous définirons plus précisément la constante de Peyre au paragraphe suivant. Un ensemble mince, au sens de [37], est défini comme suit.

**Définition 1.25.** Soit $V$ une variété définie sur $K$. Un *ensemble mince* de $V(K)$ est une réunion finie d'ensembles de la forme $f(Y(K))$, où $Y$ est une variété intègre sur $K$ et $f\colon Y \to V$ est un morphisme génériquement fini sans section rationnelle sur $K$.

La conjecture 1.24 permet d'écarter un ensemble exceptionnel $Z$ pour pouvoir éviter les phénomènes d'accumulation.

**Définition 1.26.** Soit $V$ une variété définie sur $K$ et $L$ une extension finie de $K$. Un sous-ensemble $F$ de $V(L)$ sera dit

1. *a priori fortement accumulateur* pour la hauteur $H_{\omega_V^{-1},L}$ si, pour tout ensemble mince $Z$ de $V(L)$ qui ne contient pas $F$,
$$\limsup_{B\to+\infty} \frac{\#\{x \in F - Z \mid H_{\omega_V^{-1},L}(x) \leqslant B\}}{B(\log B)^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic} V)-1}} = +\infty.$$
2. *a priori faiblement accumulateur* pour la hauteur $H_{\omega_V^{-1},L}$ si, pour tout ensemble mince $Z$ de $V(L)$ qui ne contient pas $F$,
$$\limsup_{B\to+\infty} \frac{\#\{x \in F - Z \mid H_{\omega_V^{-1},L}(x) \leqslant B\}}{B(\log B)^{\operatorname{rg}(\operatorname{Pic} V)-1}} \in \mathbf{R}_{>0}.$$

**Remarque 1.27.** Nous précisons dans cette que les ensembles sont *a priori* accumulateur, car nous comparons la contribution de l'ensemble $F$ avec la prédiction de la conjecture 1.24. Si la variété $V$ vérifie la conjecture 1.24 sur le corps de nombres $L$ pour la hauteur $H_{\omega_V^{-1},L}$, nous diront simplement *fortement accumulateur* ou *faiblement accumulateur*. Nous pouvons également définir les ensembles fortement accumulateurs de la manière suivante : il existe un ensemble mince $Z$ tel que, pour tout ensemble mince $Z'$ de $V(L)$ qui ne contient pas $F$,

$$\limsup_{B\to+\infty} \frac{\#\{x \in F - Z' \mid H_{\omega_V^{-1},L}(x) \leqslant B\}}{\#\{x \in V(L) - Z \mid H_{\omega_V^{-1},L}(x) \leqslant B\}} = +\infty.$$

Notre définition nous permet de parler d'ensembles accumulateurs avant même d'avoir étudier la contribution du complémentaire d'un ensemble mince. La conjecture 1.24 nous dit que les ensembles fortement accumulateurs devraient être contenus dans un sous-ensemble mince.

Dans la conjecture originelle de Batyrev-Manin [3], il était supposé que l'ensemble exceptionnel $Z$ était l'ensemble des points rationnels d'une sous-variété fermée stricte de $V$, ce qui est un cas particulier d'ensemble mince. Dans la suite, nous parlerons de la *conjecture 1.24 forte* lorsque l'ensemble $Z$ sera supposé de cette forme. La conjecture 1.24 forte a été démontrée pour de nombreuses variétés de Fano et variétés projectives à fibré anticanonique gros, par exemple les variétés toriques et les variétés de drapeaux. L'ensemble $Z$ peut éventuellement être vide. C'est le cas, par exemple, lorsque la variété $V$ est l'espace projectif $\mathbf{P}^n$.

**Théorème 1.28** ([31, Corollaire 6.2.18 p. 169])**.** *Soit $K$ un corps de nombres. Soit $H_{\mathcal{O}(n+1),K}$ une hauteur adélique sur $\mathbf{P}^n(K)$ relative au fibré anticanonique $\mathcal{O}(n+1)$. Alors, lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$\#\{x \in \mathbf{P}^n(K) \mid H_{\mathcal{O}(n+1),K}(x) \leqslant B\} \sim C_{H_{\mathcal{O}(n+1),K}}(\mathbf{P}^n)B$$

*et $C_{H_{\mathcal{O}(n+1),K}}(\mathbf{P}^n) > 0$ est définie explicitement.*

Les ensembles minces de $\mathbf{P}^n(K)$ ne sont jamais accumulateurs.

**Théorème 1.29** (Serre [37, 13.1.3])**.** *Soit $K$ un corps de nombres. Soit $H_{\mathcal{O}(n+1),K}$ une hauteur adélique anticanonique sur $\mathbf{P}^n(K)$ Si $F$ est un sous-ensemble mince de $\mathbf{P}^n(K)$, alors*

$$\#\{x \in F \mid H_{\mathcal{O}(n+1),K}(x) \leqslant B\} = O(B^{(2n+1)/(2n+2)}(\log B)^\gamma)$$

*avec $\gamma > 1$.*

Cette conjecture forte est cependant trop restrictive, comme l'a montré le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel [4] et les contre-exemples numériques de Elsenhans [14]. C'est pourquoi nous avons ici formulé une conjecture plus faible, en suivant une suggestion de Peyre [32, fin du paragraphe 6] également mentionnée dans [14, §6].

De plus, si la conjecture forte a d'abord été énoncée dans le cas des variétés de Fano, pour lesquelles le fibré anticanonique est ample, elle a été rapidement généralisée au cas où ce fibré est seulement supposé gros (voir par exemple [31, Remarque 2.3.2]). C'est précisément ce cas qui va nous intéresser dans cette thèse.

Nous allons, au chapitre 4, montrer que la conjecture 1.24 est vraie pour $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ mais que sa version forte est fausse dans ce cas. Nous donnerons en fait toute une famille de nouveaux contre-exemples à la conjecture forte, pour des variétés à fibrés anticanoniques gros mais pas amples (voir le paragraphe 3.3.1).

### 1.3.2 Définition de la constante de Peyre

Soit $V$ une variété projective lisse définie sur un corps de nombres $K$ et dont le fibré anticanonique $\omega_V^{-1}$ est gros. On se donne une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_v$ sur $\omega_V^{-1}$ et on note

$$H = H_{\omega_V^{-1},K}$$

la hauteur sur $V(K)$ associée.

Comme nous l'avons déjà mentionné, en suivant [31, page 120], nous pouvons préciser la conjecture 1.24 en donnant une expression conjecturale de la constante $C_H(V)$. Cette définition est valable lorsque le cône effectif de $V$ est de type fini. Ceci est, par exemple, le cas pour les variétés de Fano. La constante se définit comme le produit

$$C_H(V) = \alpha(\omega_V^{-1})\boldsymbol{\tau}_H(V). \tag{1.1}$$

Le premier facteur est donné par

$$\alpha(\omega_V^{-1}) = \frac{1}{(\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\, V) - 1)!} \int_{C_{\mathrm{eff}}^{\vee}(V)} \mathrm{e}^{-\langle \omega_V^{-1}, u\rangle}\, \mathrm{d}u,$$

où $C_{\mathrm{eff}}(V)$ est le cône effectif de $V$ dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ et $C_{\mathrm{eff}}^{\vee}(V)$ est son cône dual. Le second facteur est appelé *nombre de Tamagawa* associé à la hauteur $H$. Pour une définition détaillée de ce nombre, le lecteur est invité à consulter les pages 110 à 119 de [31]. Nous en donnons ici une brève description. On se donne un ensemble fini de places $S$ (places de mauvaises réductions) et $\mathcal{V}$ un modèle projectif et lisse de $V$ sur $\mathcal{O}_S$ suivant le lemme 2.1.1 de [31]. Pour toute place $v$ de $K$, nous noterons

$$d_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$$

et nous utiliserons les mesures de Haar normalisées $\mathrm{d}x_v$, définies sur $K_v$ de la manière suivante :

– si $v \in M_{K,f}$, $\int_{\mathcal{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$, où $\mathcal{O}_v = \{x \in K_v : |x|_v \leqslant 1\}$ ;
– si $K_v \simeq \mathbf{R}$, $\mathrm{d}x_v$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ ;
– si $K_v \simeq \mathbf{C}$, $\mathrm{d}x_v$ désigne le double de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$.

Soit $(t_1, \dots, t_n)$ un système de coordonnées locales sur $V(K_v)$, $v \in M_K$. La mesure locale $\boldsymbol{\omega}_v$ sur $V(K_v)$ est donnée par

$$\boldsymbol{\omega}_v = \left\| \frac{\partial}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial t_n} \right\|_v^{d_v} \mathrm{d}t_{1,v} \dots \mathrm{d}t_{n,v}.$$

Aux places ultramétriques $\mathfrak{p}$ pour lesquelles la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ est définie de manière usuelle, ce qui est le cas pour presque toutes les places, le volume de $V(K_{\mathfrak{p}})$ pour cette mesure est donné par le lemme suivant.

**Lemme 1.30** ([31], Lemme 2.2.1). *Soit $(s_0, \dots, s_q)$ une base de $\Gamma(V, \omega_V^{-1})$. Pour tous les $\mathfrak{p} \in M_{K,f} - S$ tels que $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ soit donnée par*

$$\|s(x)\|_{\mathfrak{p}} = \left( \max_{0 \leqslant i \leqslant q} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_{\mathfrak{p}} \right)^{-1},$$

*on a*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(K_{\mathfrak{p}})) = \frac{\#\mathcal{V}(\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{\dim V}}.$$

Ce lemme montre que le produit $\prod_{\mathfrak{p} \in M_{K,f}-S} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(K_{\mathfrak{p}}))$ est divergent. Nous introduisons donc des facteurs de convergence

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \operatorname{Pic} \bar{V}) & \text{si } v = \mathfrak{p} \in M_{K,f} - S; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous pouvons alors définir une mesure sur l'ensemble des adèles $V(\mathbf{A}_K)$, appelée *mesure de Tamagawa* associée à $H$, par

$$\boldsymbol{\omega}_H = \left( \lim_{s \to 1} (s-1)^{\operatorname{rg} \operatorname{Pic} V} L_S(s, \operatorname{Pic} \bar{V}) \right) |\Delta_K|^{-\dim V/2} \prod_{v \in M_K} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_v.$$

Celle-ci est indépendante du choix de $S$. Le nombre de Tamagawa $\boldsymbol{\tau}_H(V)$ est alors donné par

$$\boldsymbol{\tau}_H(V) = \boldsymbol{\omega}_H(\overline{V(K)}).$$

**Exemple 1.31.** Lorsque $V$ est l'espace projectif $\mathbf{P}^n$, nous pouvons prendre $S = \varnothing$. Nous avons

$$\alpha(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(n+1)) = \frac{1}{n+1},$$
$$L_{\mathfrak{p}} = 1 - \mathbf{N}(\mathfrak{p})^{-1},$$
$$L_S(s, \operatorname{Pic} \mathbf{P}^n) = \zeta_K(s)$$

et

$$\lim_{s \to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_K}(2\pi)^{s_K} h_K R_K}{w_K \sqrt{|\Delta_K|}}.$$

Considèrons la métrique adélique usuelle $(\|\cdot\|_v)_v$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(n+1)$ pour la base $(s_0, \ldots, s_n)$ de $\Gamma(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(n+1))$ associée aux coordonnées homogènes. Alors, si $\mathfrak{p}$ est une place finie nous avons, d'après le lemme 1.30,

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}^n(K_{\mathfrak{p}})) = \frac{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-(n+1)}}{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1}}. \tag{1.2}$$

Ainsi

$$\prod_{\mathfrak{p}} \lambda_{\mathfrak{p}} \boldsymbol{\omega}_{\mathfrak{p}}(V(K_{\mathfrak{p}})) = \zeta_K(n+1)^{-1}.$$

Si $v$ est une place réelle, alors

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^n(\mathbf{R})) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{\max\{1, |x_1|, \ldots, |x_n|\}^{n+1}} = (n+1)2^n$$

et si $v$ est complexe

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})) = \int_{\mathbf{C}^n} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{\max\{1, |x_1|, \ldots, |x_n|\}^{2n+2}} = (n+1)(2\pi)^n.$$

Ainsi, nous retrouvons bien la constante de Schanuel

$$C_H(\mathbf{P}^n) = (n+1)^{r_K + s_K - 1} \left( \frac{2^{r_K}(2\pi)^{s_K}}{\sqrt{|\Delta_K|}} \right)^{n+1} \frac{h_K R_K}{w_K \zeta_K(n+1)} = S_K(n).$$

### 1.3.3 Produit symétrique et points algébriques

On considère une variété projective lisse $X$ de Fano et définie sur un corps de nombres $K$. On munit le fibré ample $\omega_X^{-1}$ d'une métrique adélique. On souhaite étudier, lorsque $B$ tend vers l'infini, le cardinal de l'ensemble

$$\#\{x \in X(\bar{K}) \mid \deg_K(x) = m,\ H_{\omega_X^{-1}}(x) \leqslant B\}.$$

Nous montrons ici que cette étude peut-être mise en relation avec l'étude de la conjecture 1.24 sur une variété auxiliaire.

Pour tout entier $m \geqslant 1$, le $m$-ième produit symétrique de $X$ est la variété projective quotient

$$\operatorname{Sym}^m X = X^m/\mathfrak{S}_m,$$

où $\mathfrak{S}_m$ est le groupe symétrique d'ordre $m$, agissant que $X^m$ par permutation des facteurs. Nous noterons $\pi\colon X^m \to \operatorname{Sym}^m X$ la projection canonique.

Considérons un point $x \in X(\bar{K})$ de degré $m \geqslant 1$. Alors l'orbite de $x$ sous l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ contient exactement $m$ points, notés $x_1, \dots, x_m$ et appelés conjugués de $x$. Nous pouvons alors définir un point $\tilde{x} = \pi(x_1, \dots, x_m)$ de $\operatorname{Sym}^m X(\bar{K})$. Celui-ci est invariant sous l'action de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$, donc est rationnel sur $K$, ou encore de degré 1.

**Définition 1.32.** Les points de $\operatorname{Sym}^m X(K)$ de la forme $\tilde{x}$ , provenant d'un point $x$ de degré $m$ de $X(\bar{K})$, seront dits *irréductibles*; les autres seront dits *réductibles*.

Il nous reste maintenant à définir une hauteur sur $\operatorname{Sym}^m X(K)$ s'exprimant facilement à partir de la hauteur absolue $H_{\omega_X^{-1}}$ sur $X(\bar{\mathbf{Q}})$. Le fibré en droites anticanonique de $X^m$ est le fibré

$$\omega_{X^m}^{-1} = p_1^*\omega_X^{-1} \otimes \cdots \otimes p_m^*\omega_X^{-1}$$

où $p_i\colon X^m \to X$ est la $i$-ième projection. Celui-ci est $\mathfrak{S}_m$-linéarisé, donc il existe un unique fibré en droites $\mathcal{L}_{X,m}$ sur $\operatorname{Sym}^m X$ tel que

$$\pi^*\mathcal{L}_{X,m} = \omega_{X^m}^{-1}. \tag{1.3}$$

Ce fibré en droites est ample car $\omega_{X^m}^{-1}$ est ample et que $\pi$ est un morphisme fini surjectif (voir [20, 5.7 p. 232]).

**Proposition 1.33.** *Soit $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ une métrique adélique sur $\omega_X^{-1}$ définissant une hauteur absolue $H_{\omega_X^{-1}}$ sur $X(\bar{\mathbf{Q}})$. Alors il existe une métrique* *adélique sur* $\mathcal{L}_{X,m}$ *dont la hauteur associée* $H_{\mathcal{L}_{X,m},K}$ *sur* $\operatorname{Sym}^m X(K)$ *vérifie, pour tout* $\alpha = \pi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \operatorname{Sym}^m X(K)$,

$$H_{\mathcal{L}_{X,m},K}(\alpha) = H_{\omega_X^{-1}}(\alpha_1)^d \cdots H_{\omega_X^{-1}}(\alpha_m)^d \tag{1.4}$$

*avec* $d = [K : \mathbf{Q}]$.

*Démonstration.* Notons toujours $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ la métrique sur $\omega_{X^m}^{-1} = p_1^*\omega_X^{-1}\otimes \cdots \otimes p_m^*\omega_X^{-1}$, obtenue par tirés en arrière et produits. On définit alors la famille $(\|\cdot\|'_v)_{v\in M_K}$ sur $\mathcal{L}_{X,m}$ par

$$\|s(\alpha)\|'_v = \|(\pi^*s)(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\|_v$$

pour tout $\alpha = \pi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \operatorname{Sym}^m X(\mathbf{C}_v)$ et toute section $s$ de $\mathcal{L}_{X,m}$ ne s'annulant pas en $\alpha$. Montrons que cette famille est une métrique adélique sur $\mathcal{L}_{X,m}$. Tout d'abord, puisque $\pi$ est un morphisme fini, l'application $\pi\colon X^m(\mathbf{C}_v) \to \operatorname{Sym}^m X(\mathbf{C}_v)$ est fermée pour la topologie $v$-adique (voir [27, proposition 2.2.1]). Ainsi l'application $\alpha \mapsto \|s(\alpha)\|'_v$ est continue. De plus, pour tout $\sigma \in \operatorname{Gal}(\mathbf{C}_v/K_v)$,

$$\begin{aligned}\|\sigma(s)(\alpha)\|'_v &= \|\sigma(\pi^*s)(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\|_v\\ &= \|(\pi^*s)(\alpha_1^\sigma, \ldots, \alpha_m^\sigma)\|_v\\ &= \|(s)(\alpha^\sigma)\|'_v .\end{aligned}$$

Enfin, cette métrique est bien adélique. □

Par conséquent, si $x \in X(\bar{K})$ est de degré $m$ et $x_1, \ldots x_m \in X(\bar{K})$ sont ses conjugués, par invariance de la hauteur par conjugaison, la hauteur du point $\tilde{x} = \pi(x_1, \ldots, x_m)$ de $\operatorname{Sym}^m X(K)$ vérifie

$$H_{\mathcal{L}_{X,m},K}(\tilde{x}) = H_{\omega_X^{-1}}(x)^{dm}.$$

**Proposition 1.34.** *On a une application de l'ensemble*

$$\{x \in X(\bar{K}) \mid \deg_K(x) = m,\ H_{\omega_X^{-1}}(x) \leqslant B\}$$

*dans l'ensemble*

$$\{y \in \operatorname{Sym}^m X(K) \mid H_{\mathcal{L}_{X,m},K}(y) \leqslant B^{dm}\}$$

*dont les fibres sont soit vides, au-dessus d'un point réductible, soit de* *cardinal exactement $m$.*

Nous nous retrouvons donc face au problème de déterminer le nombre de points rationnels de hauteur bornée de la variété $\mathrm{Sym}^m X_K$. Rappelons que fibré en droites $\mathcal{L}_{X,m}$ est ample, donc la hauteur $H_{\mathcal{L}_{X,m},K}$ définie ci-dessus vérifie la propriété de Northcott.

**Proposition 1.35.** *Pour tout nombre réel $B \geqslant 0$, l'ensemble*

$$\{y \in \mathrm{Sym}^m X(K) \mid H_{\mathcal{L}_{X,m},K}(y) \leqslant B\}$$

*est fini.*

Nous souhaitons maintenant étudier la conjecture 1.24 pour $\mathrm{Sym}^m X$ muni de cette hauteur. Cette variété n'est pas toujours lisse. La méthode générale est alors d'étudier la conjecture pour une désingularisée de $\mathrm{Sym}^m X$. Nous nous intéresserons aux cas où $X$ est une courbe rationnelle (chapitre 2) ou une surface (chapitres 3 et 4).

# CHAPITRE 2

# POINTS ALGÉBRIQUES D'UNE COURBE PROJECTIVE

Dans ce chapitre, nous étudions la conjecture 1.24 pour le produit symétrique d'une courbe projective. Nous commençons par le cas de la droite projective $\mathbf{P}^1$. Nous en déduisons une généralisation du théorème de Masser-Vaaler (théorème 1.23) à toute hauteur adélique. Cette généralisation donne également une interprétation géométrique, en termes de mesure de Tamagawa, de la constante de Masser et Vaaler. Cette partie est issue de l'article [25] « Points algébriques de hauteur bornée sur la droite projective », à paraître. Nous en déduisons le cas des courbes rationnelles. En genre supérieur, nous démontrerons des majorations pour le nombre de points quadratiques de hauteur bornée.

## 2.1 Points rationnels de $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$

L'isomorphisme

$$\mathbf{A}^m \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sym}^m \mathbf{A}^1$$

qui à un polynôme, donné par ses coefficients, associe ses racines induit un isomorphisme

$$\phi\colon \mathbf{P}^m \xrightarrow{\sim} \operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1.$$

D'après le théorème de Peyre 1 déjà énoncé, la variété $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$ vérifie donc la version forte de la conjecture 1.24.

On considère le fibré en droites très ample $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ sur $\mathbf{P}^1$ et on munit celui-ci d'une métrique adélique définissant une hauteur absolue $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}$

sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$. D'après la proposition 1.33, le fibré $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\ldots,1)$ descend en un fibré en droites $\mathcal{L}_m$ sur $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$ et on note $H_{\mathcal{L}_m,K}$ la hauteur sur $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1(K)$ donnée par

$$H_{\mathcal{L}_m,K}(\pi(x_1,\ldots,x_m))^{1/[K:\mathbf{Q}]} = H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(x_1)\ldots H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(x_m).$$

**Lemme 2.1.**

$$\phi^*\mathcal{L}_m = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1).$$

**Remarque 2.2.** Le morphisme $\phi$ étant un isomorphisme, on en déduit que $L_m$ est très ample.

*Démonstration.* L'application $\sigma = \phi^{-1}\circ\pi\colon (\mathbf{P}^1)^m \to \mathbf{P}^m$ est donnée par (2.1)

$$\sigma([a_1:b_1],[a_2:b_2],\ldots,[a_m:b_m]) = \left[\sum_{\substack{J\subset\{1,2,\ldots,m\}\\ \#J=i}} \prod_{j\in J} b_j \prod_{k\notin J} a_k\right]_{i=0,1,\ldots,m}$$

et est de degré 1 en chacune des variables. Ainsi

$$\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\ldots,1).$$

Donc,

$$\pi^*((\phi^{-1})^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1)) = \mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\ldots,1) = \pi^*\mathcal{L}_m.$$

Par unicité, nous avons $(\phi^{-1})^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1) = \mathcal{L}_m$. □

Notons alors

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(m+1),K} = (H_{\mathcal{L}_{1,m},K}\circ\phi)^{m+1},$$

hauteur sur $\mathbf{P}^m(K)$ relative au fibré en droites anticanonique $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(m+1)$, et

$$C(H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)},m,K) = C_{H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(m+1),K}}(\mathbf{P}^m)$$

la constante de Peyre pour cette hauteur, dépendant de $m$, $K$ et de la hauteur sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ choisie.

**Théorème 2.3.** *Pour tout ensemble ouvert non vide $\mathcal{W}$ de* $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$*,*

$$\#\{x\in\mathcal{W}(K)\mid H_{\mathcal{L}_m,K}(x)\leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} C(H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)},m,K)\,B^{m+1}.$$

*Démonstration.* Soit $\mathcal{W}$ un ensemble ouvert non vide de $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1_K$. Nous avons

$$\#\{x \in \mathcal{W}(K) \mid H_{\mathcal{L}_m,K}(x) \leqslant B\}$$

est égal à

$$\#\{x' \in \phi^{-1}(\mathcal{W})(K) \mid H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1),K}(x') \leqslant B\}$$

ou encore

$$\#\{x' \in \phi^{-1}(\mathcal{W})(K) \mid H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(m+1),K}(x') \leqslant B^{m+1}\}.$$

L'ensemble $\phi^{-1}(\mathcal{W})$ étant un ensemble ouvert non vide de $\mathbf{P}^m$, le théorème 1.28 montre que ce cardinal est équivalent, quand $B$ tend vers l'infini, à

$$C_{H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(m+1),K}}(\mathbf{P}^m)B^{m+1}.$$

□

## 2.2 Points algébriques de $\mathbf{P}^1$

Nous étudions maintenant la répartition des points algébriques, de degré fixé $m$, sur la droite projective $\mathbf{P}^1$ définie sur un corps de nombres $K$. Nous allons montrer le théorème suivant.

**Théorème 2.4.** *Soit $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}$ une hauteur sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ définie par une métrique adélique sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Soient $K$ un corps de nombres de degré $d$ et $m$ un entier naturel non nul. Alors, lorsque $B$ tend vers l'infini, le cardinal $N_{m,K}(B)$ de l'ensemble*

$$\{\alpha \in \mathbf{P}^1(\bar{K}) \mid [K(\alpha) : K] = m \text{ et } H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}(\alpha) \leqslant B\}$$

*vérifie*

$$N_{m,K}(B) \underset{B\to+\infty}{\sim} mC(H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a)}, m, K)\, B^{dm(m+1)}.$$

*Démonstration.* Dans cette preuve, les constantes implicites dans les $\ll$ ne dépenderont que de $m$, du corps $K$ et du choix de la hauteur sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$. D'après la proposition 1.34, il suffit ici de montrer que les points réductibles de l'ensemble $(\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K)$ sont négligeables dans l'estimation du théorème 2.3. Nous pouvons identifier $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1(K)$ à l'ensemble des 0-cycles effectifs $K$-rationnels de degré $m$ sur $\mathbf{P}^1$. Nous utiliserons ici la notation en combinaison linéaire formelle. La variété $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$ est munie du fibré en droites $\mathcal{L}_{1,m}$ défini au paragraphe précédent et issu de $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1)^m}(1,\ldots,1)$. Soit $[a] \in (\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K)$ un point réductible tel que $H_{\mathcal{L}_{1,m}}([a]) \leqslant B$. Ceci signifie qu'il existe $[b] \in (\operatorname{Sym}^p \mathbf{P}^1)(K)$ et $[c] \in (\operatorname{Sym}^q \mathbf{P}^1)(K)$ tels que

$$[a] = [b] + [c],$$

avec $p + q = m$, $p \geqslant 1$ et $q \geqslant m/2$. Alors

$$H_{\mathcal{L}_{1,m}}([a]) = H_{\mathcal{L}_{1,p}}([b]) H_{\mathcal{L}_{1,q}}([c]) \leqslant B.$$

Puisque les fibrés en droites $\mathcal{L}_{1,p}$ et $\mathcal{L}_{1,q}$ sont amples, les hauteurs $H_{\mathcal{L}_{1,p}}$ et $H_{\mathcal{L}_{1,q}}$ sont minorées par des réels strictement positifs $c_p$ et $c_q$, respectivement. Notons

$$c_m = \min\{c_p,\ c_q \mid p + q = m,\ p \geqslant 1,\ q \geqslant m/2\} > 0$$

qui dépend également du corps $K$ et du choix de la hauteur sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$. Ainsi, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$2^k \leqslant H_{\mathcal{L}_{1,p}}([b]) \leqslant 2^{k+1}.$$

Par conséquent,

$$c_m \leqslant H_{\mathcal{L}_{1,q}}([c]) \leqslant 2^{-k} B.$$

Ceci implique que $k \ll \log(B)$. En utilisant le théorème 2.3 sur $\operatorname{Sym}^p \mathbf{P}^1$ et $\operatorname{Sym}^q \mathbf{P}^1$, nous obtenons que, le nombre de choix possibles pour un tel $[b]$ est inférieur à $C\, 2^{d(p+1)(k+1)}$ et celui pour un tel $[c]$ est inférieur à $C'(2^{-k}B)^{d(q+1)}$, où $C$ et $C'$ sont des constantes strictement positives. Ainsi

$$\#\{[a] \in (\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1)(K) \text{ réductible} \mid H_{\mathcal{L}_{1,m}}([a]) \leqslant B\}$$

est

$$\ll \sum_{\substack{1 \leqslant k \ll \log(B) \\ \frac{m}{2} \leqslant q \leqslant m-1}} 2^{dk(m-2q)} B^{d(q+1)} \ll \log(B) B^{dm}.$$

Or $dm < d(m+1)$, donc la contribution des points réductibles est négligeable dans l'estimation du théorème 2.3. $\square$

**Remarque 2.5.** L'ensemble de points rationnels de $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1(K)$ s'identifie à l'union des ensembles de points rationnels de la forme

$$(\mathrm{Sym}^p\, \mathbf{P}^1(K) \times \mathrm{Sym}^q\, \mathbf{P}^1(K))/\mathfrak{S}_2,$$

avec $p + q = m$. Le morphisme $\varepsilon$ est sans section rationnelle, car l'ensemble des points irréductibles est dense pour la topologie de Zariski. Ainsi, l'image de l'ensemble des points réductibles de $\mathrm{Sym}^m\, \mathbf{P}^1(K)$ dans $\mathbf{P}^m(K)$ par le morphisme $\varepsilon$ est un ensemble mince de $\mathbf{P}^m(K)$. D'après le théorème 13.1.3 de [37], la contribution d'un ensemble mince de $\mathbf{P}^m(K)$ est négligeable. La démonstration précédente fournit une preuve élémentaire.

## 2.3 Calculs de constantes de Peyre

Considérons donc une métrique adélique $(\|\cdot\|_v)_v$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$. Nous explicitons ici la constante $C(H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}, m, K)$ intervenant dans le théorème 2.3, pour quelques hauteurs sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ particulières. Rappelons que cette constante est celle définie par Peyre pour la hauteur $H$ sur $\mathbf{P}^m(K)$ associée à la métrique adélique sur le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(m+1)$ donnée par

$$\|s_0([1:t_1:\ldots:t_m])\|_v = \prod_{\substack{a\in\bar{K}_v \text{ racine de} \\ T^m - t_1T^{m-1}+\cdots+(-1)^m t_m}} \|s_0([1:a])\|_v^{m+1}, \tag{2.2}$$

les racines de $T^m - t_1T^{m-1} + \cdots + (-1)^m t_m$ étant comptées avec multiplicité.

**Remarque 2.6.** Rappelons que l'on a introduit

$$\delta_v([1:a]) = \log\left(\|s_0([1:a])\|_v \max\{1, |a|_v\}\right),$$

donc nous avons également

$$\|s_0([1:t_1:\ldots:t_m])\|_v = \prod_{\substack{a\in\bar{K}_v \text{ racine de} \\ T^m - t_1T^{m-1}+\cdots+(-1)^m t_m}} \frac{\exp\left(\delta_v([1:a])\right)^{m+1}}{\max\{1, |a|_v\}^{m+1}}.$$

Alors

$$C(H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}, m, K) = \frac{2^{r_K}(2\pi)^{s_K} h_K R_K}{(m+1) w_K \sqrt{|\Delta_K|}^{m+1}} \prod_{v \in M_K} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)). \tag{2.3}$$

avec $\lambda_v = 1 - \mathbf{N}(\mathfrak{p})^{-1}$ si $v = \mathfrak{p}$ est finie et $\lambda_v = 1$ sinon.

Nous allons calculer cette constante $C(H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)}, m, K)$, donc en fait les volumes

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)) = \int_{K_v^m} \|s_0([1 : t_1 : \ldots : t_m])\|_v^{d_v} \,\mathrm{d}\underline{t},$$

en partant de différentes métriques sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$.

### 2.3.1 Métrique usuelle

La métrique usuelle sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$, pour la base $(s_0, s_1)$ associée aux coordonnées homogènes, vérifie pour toute place $v$

$$\delta_v = 0.$$

Nous sommes alors dans le cadre du théorème 1.23 de Masser et Vaaler. Les volumes locaux sont alors donnés par la proposition suivante.

**Proposition 2.7.** *Soit $v \in M_K$ telle que $\delta_v = 0$. Alors, dans le cadre de la définition 2.2, nous avons*

1. *Si $v = \mathfrak{p}$ est finie, alors*

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)) = \frac{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-(m+1)}}{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1}}.$$

2. *Si $v \in M_K$ est telle que $K_v \simeq \mathbf{C}$, alors*

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)) = (2\pi)^m \frac{(m+1)^m}{(m!)^2}.$$

3. *Si $v \in M_K$ est telle que $K_v \simeq \mathbf{R}$, alors*

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)) = 2^m (m+1)^{\ell+1} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{(2i)^{m-2i}}{(2i+1)^{m+1-2i}},$$

*où* $\ell = \left\lfloor \dfrac{m-1}{2} \right\rfloor$.

*Démonstration.* Les volumes s'écrivent

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)) = \int_{K_v^m} \frac{\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_m}{\prod\limits_{\substack{a \in \bar{K}_v \text{ racine de} \\ T^m - t_1 T^{m-1} + \dots + (-1)^m t_m}} \max\{1, |a|_v\}^{d_v(m+1)}}.$$

Lorsque $K_v \simeq \mathbf{R}$ et $K_v \simeq \mathbf{C}$, les intégrales voulues sont calculées dans [11, Théorème 1]. Si $v = \mathfrak{p}$ est finie, on a par le lemme de Gauss

$$\prod_{\substack{a \in \bar{K}_v \text{ racine de} \\ T^m - t_1 T^{m-1} + \dots + (-1)^m t_m}} \max\{1, |a|_v\} = \max\{1, |t_1|_v, \dots, |t_m|_v\}.$$

Donc la métrique aux places finies est la métrique usuelle et, d'après (1.2),

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)) = \frac{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-(m+1)}}{1 - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1}}.$$

Nous donnons ici une démonstration alternative utilisant la théorie des polygones de Newton. Soit

$$f_x(T) = T^n - x_1 T^{m-1} + \dots + (-1)^m x_m \in K_v[T]$$

Le polygone de Newton $\mathcal{P}_{x,v}$ de $f_x$ pour la place finie $v$ est l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ des points $(j, v(x_j))$, $j \geqslant 0$ (si $x_j = 0$, $v(j) = +\infty$).

Alors chaque côté fini du polygone a une pente qui vaut $\lambda = -v(a)$ où $a$ est une racine de $f_x$ et la longueur de la pente donne le nombre de racines de $f_x$ dont la valuation est $-\lambda$. Notons, pour toute place finie $v = \mathfrak{p}$

$$q_v = \mathbf{N}(\mathfrak{p})$$

et

$$h_v(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\substack{a \text{ racine de} \\ T^m - x_1 T^{m-1} + \dots + (-1)^m x_m}} \log_{q_v} \max\{1, |a|_v\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} h_v(x_1, \dots, x_m) &= \sum_{\substack{a \text{ racine de} \\ T^m - x_1 T^{m-1} + \dots + (-1)^m x_m}} \max\{0, -v(a)\} \\ &= \sum_{\substack{c \text{ côté fini de } \mathcal{P}_x \\ \text{de pente } > 0}} \text{longueur}(c) \times \text{pente}(c). \end{aligned}$$

Les pentes de $\mathcal{P}_{x,v}$ sont croissantes. Si une seule pente est positive, c'est la dernière. Elle vaut $-v(x_1)$ et est de longueur 1. Donc

$$h_v(x_1, \ldots, x_m) = -v(x_1).$$

S'il y a deux pentes positives, ce sont les deux dernières. Dans ce cas,

$$h_v(x_1, \ldots, x_m) = -v(x_1) + (v(x_1) - v(x_2)) = -v(x_2).$$

En continuant à raisonner ainsi, on voit que $h_v(x_1, \ldots, x_m)$ prend exactement les valeurs de l'ensemble $\{-v(x_1), \ldots, -v(x_m)\}$. Alors $K_v^m$ est l'union disjointe des ensembles

$$\mathcal{U}_i = \{x \in K_v^m \mid v(x_i) < 0, \forall j < i, v(x_j) > v(x_i) \text{ et } \forall k > i, v(x_k) \leqslant v(x_i)\},$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m$, correspondants aux cas où $\mathcal{P}_{x,v}$ a exactement $i$ pentes strictement positives et donc où $h_v(x_1, \ldots, x_m) = -v(x_i)$, et de l'ensemble

$$\mathcal{U}_0 = \{(x_1, \ldots, x_m) \in K_v^m \mid v(x_i) \geqslant 0 \ \forall i\}$$

correspondant aux cas où $\mathcal{P}_x$ n'a pas pente strictement positive et donc où $h_v(x_1, \ldots, x_m) = 0$.
On a alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v)) &= \int_{K_v^m} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m}{\exp(h_v(x_1, \ldots, x_m))^{d_v(m+1)}} \\ &= \int_{\mathcal{U}_0} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m + \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{U}_i} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m}{|x_i|_v^{d_v(m+1)}}.\end{aligned}$$

D'après la convention prise pour la mesure,

$$\int_{\mathcal{U}_0} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m = 1.$$

Par ailleurs, notons $\mathfrak{m}_v = \{x \in K_v \mid v(x) > 0\}$, idéal maximal de $\mathcal{O}_v$ engendré par $\varpi$, et $\mathcal{O}_v^\times = \{x \in K_v \mid v(x) = 0\}$. Alors

$$\int_{\mathfrak{m}_v} \mathrm{d}x = \|\varpi\|_v \int_{\mathcal{O}_v} \mathrm{d}x = |\varpi|_v^{d_v} = \frac{1}{q_v}$$

et

$$\int_{\mathcal{O}_v^\times} \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{q_v}.$$

Soit $(x_1,\dots,x_m)\in\mathcal{U}_i$, $1\leqslant i\leqslant m$. Il existe un entier naturel $n\geqslant 1$ tel que $v(x_i)=-m$. Alors

$$\begin{cases} x_i=\varpi^{-n}u, & u\in\mathcal{O}_v^{\times};\\ x_j=\varpi^{-n}a_j, & a_j\in\mathfrak{m}_v,\ \forall j<i;\\ x_k=\varpi^{-n}b_k, & b_k\in\mathcal{O}_v,\ \forall k>i.\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}_i}\frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m}{|x_i|_v^{d_v(m+1)}} &= \sum_{n\geqslant 1}\Bigg[{q_v}^{-(m+1)n}\,|\varpi|_v^{-d_vn}\left(1-\frac{1}{q_v}\right)\left(|\varpi|_v^{-d_vn}\,\frac{1}{q_v}\right)^{i-1}\times\\ &\qquad\times\left(|\varpi|_v^{-d_vn}\right)^{m-i}\Bigg]\\ &=\left(1-\frac{1}{q_v}\right)\sum_{n\geqslant 1}{q_v}^{-(m+1)n}\frac{1}{q_v^{-n}}\left(\frac{1}{q_v^{-n+1}}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{q_v^{-n}}\right)^{m-i}\\ &=\frac{1}{q_v^i}\left(1-\frac{1}{q_v}\right)\sum_{n\geqslant 1}{q_v}^{-(n-1)}\\ &=\frac{1}{q_v^i}.\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.8.** Avec les notation du théorème 1.23, lorsque $v$ est réelle, nous avons

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v))=2^m(m+1)V_{\mathbf{R}}(m)$$

et lorsque $v$ est complexe,

$$\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^m(K_v))=(2\pi)^m(m+1)V_{\mathbf{C}}(m).$$

De plus

$$\prod_{\mathfrak{p}\text{ finie}}\frac{1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-(m+1)}}{1-\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-1}}=\zeta_K(m+1)^{-1}.$$

Nous en déduisons la constante associée.

**Corollaire 2.9.** *Avec les notations du théorème 1.23 ;*

$$C(H_1,m,K)=V_{\mathbf{R}}(m)^{r_K}V_{\mathbf{C}}(m)^{s_K}S_K(m).$$

Ainsi, dans le cas où la hauteur initiale sur $\mathbf{P}^1$ est la hauteur usuelle, ce résultat donne une interprétation de la constante de Masser-Vaaler (théorème 1.23) en termes de mesure de Tamagawa.

### 2.3.2 Métrique euclidienne

Considérons la métrique $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ donnée, aux places finies, par la métrique usuelle et, aux places infinies, par la norme euclidienne sur $K_v^2$, c'est-à-dire que, pour toute place infinie $v$, pour tout $x \in \mathbf{P}^1(K_v)$ et toute section $s$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ ne s'annulant pas en $x$,

$$\|s(x)\|_v = \left( \left| \frac{s_0(x)}{s(x)} \right|_v^2 + \left| \frac{s_1(x)}{s(x)} \right|_v^2 \right)^{-1/2}.$$

La hauteur associée sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ sera noté $H_{1,e}$.
Nous nous plaçons, à titre d'exemple, dans le cas où $m = 2$.

**Proposition 2.10.** *Sous ces conditions nous avons*

1. *si* $K_v \simeq \mathbf{C}$, $\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^2(K_v)) = \pi^2$ ;
2. *si* $K_v \simeq \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^2(K_v)) = \frac{3\pi}{2}$ ;
3. *la constante de Peyre est*

$$C(H_{1,e}, 2, K) = \frac{2^{s_K} 3^{r_K} \pi^{r_K+3s_K} h_K R_K}{3 w_K \left|\Delta_K\right|^{3/2} \zeta_K(3)}.$$

*Démonstration.* Comme aux places finies nous avons $\delta_v = 0$, la proposition 2.7 donne

$$\prod_{v\in M_{K,f}} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^2(K_v)) = \frac{1}{\zeta_K(3)}.$$

Il ne nous reste que les volumes archimédiens à calculer. Si $K_v = \mathbf{C}$, ce volume est

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^2(K_v)) &= \int_{\mathbf{C}^2} \frac{\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2}{\displaystyle\prod_{\substack{t \text{ racine de} \\ T^2+z_1T+z_2}} (1+|t|^2)^{6/2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^2} \frac{|s-t|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{(1+|s|^2)^3(1+|t|^2)^3} \\
&= \pi^2.
\end{aligned}$$

Et, si $K_v = \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_v(\mathbf{P}^2(K_v)) &= \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\prod\limits_{\substack{t \text{ racine de} \\ T^2+xT+y}} (1+|t|^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{|s-t|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{(1+|s|^2)^{3/2}(1+|t|^2)^{3/2}} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}} \frac{|z-\bar{z}|\,\mathrm{d}z}{(1+|t|^2)^3} \\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

### 2.3.3 Métrique induite par une droite de $\mathbf{P}^2$

Considérons à présent, pour $(a,b) \in K^2$, la métrique $(\|\cdot\|_{(a,b),v})_v$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ donnée, pour $v \in M_K$, $x \in \mathbf{P}^1(K_v)$ et $s$, section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ non nulle en $x$, par

$$\|s(x)\|_{(a,b),v} = \left(\max\left\{\left|\frac{s_0(x)}{s(x)}\right|_v, \left|\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v, \left|a\frac{s_0(x)}{s(x)} + b\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v\right\}\right)^{-1},$$

si $v$ est finie et

$$\|s(x)\|_{(a,b),v} = \left(\left|\frac{s_0(x)}{s(x)}\right|_v^2 + \left|\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v^2 + \left|a\frac{s_0(x)}{s(x)} + b\frac{s_1(x)}{s(x)}\right|_v^2\right)^{-1/2},$$

si $v$ est infinie.

Celle-ci peut-être vue comme la métrique induite par la métrique sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$, donnée aux places infinie par la norme euclidienne, en restriction à la droite de $\mathbf{P}^2$ d'équation $ax_0 + bx_1 + x_2 = 0$, via l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}^1 & \longrightarrow & \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbf{P}^2 \mid ax_0 + bx_1 + x_2 = 0\} \\ [x_0 : x_1] & \longmapsto & [x_0 : x_1 : -ax_0 - ax_1]\end{array}$$

Notons $H_{(a,b)}$ la hauteur sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ associée. Lorsque $(a,b) = (0,0)$, nous retrouvons la métrique considérée au paragraphe précédent et donc

$$H_{(0,0)} = H_{1,e}.$$

**Proposition 2.11.** *Sous ces conditions,*

$$C(H_{(a,b)}, m, K) = \frac{C(H_{1,e}, m, K)}{H_{2,e,K}([a:b:1])^m}.$$

*Démonstration.* Notons ici

$$\boldsymbol{\omega}_{(a,b),v}(\mathbf{P}^m(K_v))$$

les volumes locaux. Nous avons, pour toute place $v$ finie,

$$\boldsymbol{\omega}_{(a,b),v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \int_{K_v^m} \frac{\mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_m}{\prod\limits_{\substack{t \text{ racine de} \\ T^m + z_1 T^{m-1} + \cdots + z_m}} \max\{1, |t|_v, |a+bt|_v\}^{d_v(m+1)}},$$

et pour toute place $v$ infinie,

$$\boldsymbol{\omega}_{(a,b),v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \int_{K_v^m} \frac{\mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_m}{\prod\limits_{\substack{t \text{ racine de} \\ T^m + z_1 T^{m-1} + \cdots + z_m}} (1 + |t|_v^2 + |a+bt|_v^2)^{d_v(m+1)/2}},$$

où $d_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$. Soit $v$ une place finie. Remarquons tout d'abord que le volume est symétrique en $(a, b)$, par changement de variables sur les racines $t \mapsto \frac{1}{t}$. Nous pouvons donc supposer que $\max\{1, |a|_v, |b|_v\} = \max\{1, |b|_v\}$.
Si $\max\{1, |b|_v\} = 1$, alors nous avons clairement

$$\boldsymbol{\omega}_{(a,b),v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \boldsymbol{\omega}_{(0,0),v}(\mathbf{P}^m(K_v)).$$

Si maintenant $\max\{1, |b|_v\} = |b|_v$, le changement de variables $t \mapsto a + tb$, donne

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{(a,b),v}(\mathbf{P}^m(K_v)) &= |b|_v^{-d_v m}\, \boldsymbol{\omega}_{(0,0),v}(\mathbf{P}^2(K_v)) \\ &= \max\{1, |a|_v, |b|_v\}^{-d_v m} \boldsymbol{\omega}_{(0,0),v}(\mathbf{P}^m(K_v)).\end{aligned}$$

Soit maintenant $v$ une place infinie. Alors, pour tout $t \in \mathbf{C}_v$,

$$1 + |t|_v^2 + |a+tb|_v^2 = \overline{\begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix}} Q(a,b) \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec

$$Q(a,b) = \begin{pmatrix} 1+|b|_v^2 & a\bar{b} \\ \bar{a}b & 1+|a|_v^2 \end{pmatrix},$$

matrice hermitienne définie positive. Son déterminant vaut $1+|a|_v^2+|b|_v^2$. De plus, il existe une unique matrice hermitienne définie positive $P(a,b)$ telle que $P(a,b)^2 = Q(a,b)$. Notons

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}.$$

Le changement de variables

$$t \mapsto \frac{p_1 t + p_2}{p_3 t + p_4}$$

permet de montrer que

$$\boldsymbol{\omega}_{(a,b),v}(\mathbf{P}^m(K_v)) = \left(1+|a|_v^2+|b|_v^2\right)^{-d_v m/2} \boldsymbol{\omega}_{(0,0),v}(\mathbf{P}^m(K_v)).$$

□

Lorsque $m=2$, la proposition 2.10 donne

**Corollaire 2.12.**

$$C(H_{(a,b)},2,K) = \frac{2^{s_K}3^{r_K}\pi^{r_K+3s_K}h_K R_K}{3w_K\,|\Delta_K|^{3/2}\,\zeta_K(3)} \frac{1}{H_{2,K}([a:b:1])^2}.$$

## 2.4 Produit symétrique d'une courbe rationnelle

Nous allons maintenant déterminer la répartition des points rationnels de $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$ pour une courbe rationnelle et géométriquement irréductible $\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{M}$ un fibré en droites ample sur $\mathcal{C}$ et $H_{\mathcal{M}}$ une hauteur adélique sur $\mathcal{C}(\bar{\mathbf{Q}})$ relative à ce fibré. Le fibré $\mathcal{M}$ induit un fibré en droites

$$p_1^*\mathcal{M} \otimes p_2^*\mathcal{M}$$

sur $\mathcal{C}^2$ qui descend en un fibré en droites amples $\mathcal{L}_{\mathcal{M},2}$ sur $\operatorname{Sym}^2 \mathcal{C}$.

**Théorème 2.13.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe rationnelle géométriquement irréductible définie sur $K$ telle que $\mathcal{C}(K) \neq \varnothing$. Soit $\mathcal{M}$ un fibré en droites ample sur $\mathcal{C}$ et notons $a = \deg \mathcal{M} > 0$. Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert non vide de lissité de $\mathcal{C}$. Alors il existe une constante $C(H_{\mathcal{M}}, m, K) > 0$ telle que*

$$\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m,K}}(y) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} C(H_{\mathcal{M}}, m, K) B^{\frac{m+1}{a}}.$$

*Démonstration.* Il existe un morphisme birationnel $\varphi\colon \mathbf{P}^1 \to \mathcal{C}$ défini sur $K$ qui induit un isomorphisme de l'ouvert non vide $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\mathcal{U})$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$. De plus, $\varphi^*\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)$ ce qui, par composition par $\varphi$ et fonctorialité, définit une hauteur $H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)}$ sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ relative à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(a)$. Ce morphisme $\varphi$ induit également un morphisme birationnel $\tilde{\varphi}_m\colon \operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1 \to \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$ et $\operatorname{Sym}^m \mathcal{V}$ est isomorphe à $\operatorname{Sym}^m \mathcal{U}$ via celui-ci.

Nous noterons $\mathcal{W} = \tilde{\varphi}_m^{-1}(\operatorname{Sym}^m \mathcal{U})$, ensemble ouvert non vide de $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^1$. Alors le cardinal

$$\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m,K}}(y) \leqslant B\}$$

est égal à

$$\#\{y' \in \mathcal{W}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{a,m,K}}(y') \leqslant B\}$$

ce qui est équivalent, lorsque $B$ tend vers l'infini, à

$$C_{H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m(a)}},K}(\mathbf{P}^m) B^{\frac{m+1}{a}},$$

d'après le théorème 2.3. □

Nous en déduisons une majoration lorsque la courbe $\mathcal{C}$ n'a pas de point rationnel sur $K$.

**Corollaire 2.14.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe rationnelle géométriquement irréductible définie sur $K$. Soient*

$$k = \min\{[L : K],\ \mathcal{C}(L) \neq \varnothing\},$$

*$\mathcal{M}$ un fibré en droites ample sur $\mathcal{C}$ de degré $a > 0$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble ouvert non vide de lissité de $\mathcal{C}$. Alors*

$$\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m,K}}(y) \leqslant B\} = O(B^{\min\{k(m+1)/a, m+1\}}).$$

**Remarque 2.15.** On peut toujours supposer que $k \leqslant m$, car sinon l'ensemble $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ est vide.

*Démonstration.* Si la courbe $\mathcal{C}$ n'a pas de points rationnels sur $K$, un morphisme birationnel $\varphi\colon \mathbf{P}^1 \to \mathcal{C}$ ne peut pas être défini sur $K$. Cependant il sera défini sur une extension finie $L$ de $K$ dont on peut majorer le degré. En effet, puisque $\mathcal{C}$ possède un diviseur de degré $a > 0$, alors elle possède un point rationnel sur une extension de degré au plus $a$. Donc on peut supposer que $[L : K] \leqslant a$. De plus, puisque la courbe $\mathcal{C}$ a un point algébrique de degré $k$ sur $K$, on peut supposer que $[L : K] \leqslant d$. Au final, on obtient

$$[L : K] \leqslant \min\{a, d\}.$$

Enfin, puisque $(H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},L})_{|\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)} = H^{[L:K]}_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}(y) \leqslant B\}& \\
&\leqslant \#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{U}(L) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},L}(y) \leqslant B^{[L:K]}\} \\
&\ll B^{[L:K](m+1)/a} \\
&\ll B^{\min\{k(m+1)/a, m+1\}}.
\end{aligned}$$

□

Le calcul de la proposition 2.11 permet de donner un énoncé plus précis dans le cas d'une droite de $\mathbf{P}^2$.

**Proposition 2.16.** *On considère la droite $\mathcal{D}_{a,b}$ de $\mathbf{P}^2$ d'équation*

$$ax_0 + bx_1 + x_2 = 0$$

*avec $(a, b) \in K^2$ et on munit $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ de la hauteur euclidienne $H^3_{2,e}$, relative au fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$. Alors, lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{D}_{a,b}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathbf{P}^2,m},K}(y) \leqslant B\}$$

*est équivalent à*

$$\frac{C(H_{1,e}, m, K)}{H_{2,e,K}([a : b : 1])^m} B^{(m+1)/3}$$

*et*

$$\#\{x \in \mathcal{D}_{a,b}(\bar{K}) \mid \deg_K(x) = m,\ H_{2,e}(x) \leqslant B\}$$

*est équivalent à*

$$\frac{C(H_{1,e}, m, K)}{H_{2,e,K}([a:b:1])^m} B^{dm(m+1)}.$$

**Remarque 2.17.** La répartition des points rationnels (respectivement algébriques) d'une sous-variété linéaire de $\mathbf{P}^n$ a été étudiée dans [12] (respectivement [42]). Nous retrouvons ici, lorsque $m = 1$, un cas particulier du théorème 0.1 de [12] et pour $m \geqslant 2$ ce résultat complète le théorème 1.1 de [42], les hypothèses excluant les droites de $\mathbf{P}^2$.

## 2.5 Courbes de genre supérieur

Les points rationnels de hauteurs bornées du $m$-ième produit symétrique d'une courbe de genre $g \geqslant 2$ ont déjà été le sujet de plusieurs articles.

**Théorème 2.18** (Silverman [39], Kuvidakis). *Soient $\mathcal{C}$ une courbe projective lisse définie sur $K$ de genre $g \geqslant 2$, avec $1 \leqslant m < \sqrt{g}$, et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$ muni d'une métrique adélique. Il existe un fermé strict $Y \subset \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$ tel que pour toute extension finie $L$ de $K$ et tout $B \geqslant 2$,*

$$\#\{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(L) - Y(K) \text{ irréductible} \mid H_{\mathcal{L},L}(y) \leqslant B\} \ll_{\mathcal{C},L} \log\log B.$$

*De plus, si la courbe $\mathcal{C}$ est hyperelliptique (respectivement trigonale), ceci est en fait valable pour $m < (g+1)/2$ (respectivement $m < (g+2)/3$).*

**Remarque 2.19.** Si la courbe $\mathcal{C}$ est hyperelliptique ou bi-elliptique le fermé $Y$ sera non vide, mais dans tous les autres cas, on peut prendre $Y = \varnothing$.

Le théorème suivante traite des cas où $m > 2g - 2 \geqslant 2$.

**Théorème 2.20** (Faltings [15, Théorème 8], Batyrev-Tschinkel [6, Théorèmes 4.3.1 et 4.3.2]). *Soit $\mathcal{C}$ une courbe irréductible lisse définie sur $K$ de genre $g \geqslant 2$, avec $m > 2g - 2$. Soit $\mathcal{M}$ un fibré en droites hermitien ample sur $\mathcal{C}$. Notons $\alpha(\mathcal{C}) = (m+1-g)/\deg \mathcal{M}$. Il existe des nombres réels $\varepsilon(\mathcal{C}) > 0$ et $\Theta(\mathcal{C}) \neq 0$ tels que la fonction zeta des hauteurs*

$$Z(\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}, \mathcal{L}_{\mathcal{M},m}, s) = \sum_{y \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)} H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},K}(y)^{-s}$$

*vérifie*

$$Z(\mathrm{Sym}^m\,\mathcal{C}, \mathcal{L}_{\mathcal{M},m}, s) = \frac{\Theta(\mathcal{C})}{s-\alpha} + f(s)$$

*avec $f$ holomorphe pour* $\mathrm{Re}(s) > \alpha(\mathcal{C}) - \varepsilon(\mathcal{C})$.

Par le théorème taubérien de Wiener et Ikehara, nous en déduisons le résultat suivant.

**Corollaire 2.21.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe irréductible lisse définie sur $K$ de genre $g \geqslant 2$, avec $m > 2g-2$. Soit $\mathcal{M}$ un fibré en droites hermitien ample sur $\mathcal{C}$. Alors il existe un nombre réel $C_{\mathcal{C},K} > 0$ tel que*

$$\#\{y \in \mathrm{Sym}^m\,\mathcal{C}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},m},L}(y) \leqslant B\} \sim C_{\mathcal{C},K} B^{(m+1-g)/\deg\mathcal{M}}.$$

## 2.6 Points quadratiques d'une courbe projective

Nous complétons maintenant ces résultats dans le cas où $m = 2$, qui nous intéressera plus particulièrement au chapitre 4.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective de genre $g \geqslant 0$ définie et irréductible sur $K$. On notera $\tilde{\mathcal{C}}$ la courbe normalisée de $\mathcal{C}$ et

$$\rho\colon \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}.$$

Soit $\mathcal{M}$ un fibré en droites ample sur $\mathcal{C}$ qui induit un fibré en droites amples $\mathcal{L}_{\mathcal{M},2}$ sur $\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{C}$. Notons

$$N_{\mathcal{M}}(B) = \#\{y \in \mathrm{Sym}^2\,\mathcal{C}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},2},K}(y) \leqslant B\}.$$

Nous souhaitons majorer ce cardinal en fonction de $B$. Tout d'abord $N_{\mathcal{M}}(B)$ est inférieur ou égal à

$$\#\{y \in \mathrm{Sym}^2\,\tilde{\mathcal{C}}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2},K}(y) \leqslant B\}.$$

Traitons le cas où $\mathcal{C}$ n'est pas irréductible sur $\mathbf{C}$.

**Proposition 2.22.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective de genre $g \geqslant 0$ définie et irréductible sur $K$, mais pas géométriquement irréductible.*

*Si $g \geqslant 1$, il existe un nombre entier $r \geqslant 1$ tel que*

$$N_{\mathcal{M}}(B) \ll (\log B)^{r/2}.$$

*Si $g = 0$,*

$$N_{\mathcal{M}}(B) \ll B^{2/\deg \mathcal{M}}.$$

*Démonstration.* Sur $\bar{\mathbf{Q}}$, on a

$$\mathcal{C}_{\bar{\mathbf{Q}}} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k,$$

où les $\mathcal{C}_i$ sont des courbes définies sur $\bar{\mathbf{Q}}$, irréductibles et conjuguées et $k \geqslant 2$. On notera $L$ un corps de nombres de degré $k$ sur lequel sont définies ces courbes. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ les automorphismes de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ tels que

$$\sigma_i(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_i.$$

Les points rationnels de $\mathcal{C}$ sont situés à l'intersection de toutes les courbes $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ et sont donc en nombre fini. Ainsi, il suffit de majorer le nombre de points $y \in \mathrm{Sym}^2 \mathcal{C}(K)$ de hauteur bornée et de la forme $y = \pi(x, x')$, où $x, x' \in \mathcal{C}(\bar{K})$ sont quadratiques conjugués. Nous pouvons supposer qu'un tel point $y$ existe car sinon $N_{\mathcal{M}}(B) = 0$. Nous pouvons également supposer que $x \in \mathcal{C}_1(\bar{K})$ et que celui-ci est lisse. En effet, la courbe $\mathcal{C}$ a un nombre fini de points singuliers, situés aux intersections des courbes $\mathcal{C}_i$. Alors, les points $\sigma_1(x) \in \mathcal{C}_1(\bar{K})$, $\sigma_2(x) \in \mathcal{C}_2(\bar{K})$, $\ldots$, $\sigma_r(x) \in \mathcal{C}_r(\bar{K})$ sont deux à deux distincts. Donc

$$k = 2.$$

De plus, $K(x) = L$. En effet, si $\sigma$ est un automorphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$, alors $\sigma(x)$ est un point de $\mathcal{C}_1$ et peut valoir $x$ ou $x'$. Puisque $x' \notin \mathcal{C}_1$, nous avons $\sigma(x) = x$. Alors

$$\begin{aligned}\#\{y \in \mathrm{Sym}^2 \mathcal{C}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathcal{M},2,K}}(y) \leqslant B\} &\ll \#\{x \in \mathcal{C}(L) \mid H_{\mathcal{M}}(x)^2 \leqslant B\} \\ &\ll \#\{x \in \mathcal{C}(L) \mid H_{\mathcal{M},L}(x) \leqslant B\}\end{aligned}$$

Si $\mathcal{C}$ est de genre supérieur ou égal à 2, ce nombre est fini. Si $\mathcal{C}$ est une courbe elliptique sur $L$,

$$\#\{x \in \mathcal{C}(L) \mid H_{\mathcal{M},L}(x) \leqslant B\} \ll (\log B)^{r/2}$$

où $r$ est le rang de $\mathcal{C}(L)$ ( d'après le théorème 6, page 305, de [29]). Enfin, si $g = 0$, d'après 2.13

$$\#\{x \in \mathcal{C}(L) \mid H_{\mathcal{M},L}(x) \leqslant B\} \ll B^{2/\deg \mathcal{M}}.$$

□

Passons aux courbes géométriquement irréductibles. Le théorème 2.13 traite le cas $g = 0$. Pour les autres cas nous obtenons les majorations suivantes.

**Proposition 2.23.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective de genre $g \geqslant 1$ définie sur $K$ et géométriquement irréductible.*

1. *Si $g \geqslant 2$ et $\mathcal{C}$ n'est pas hyperelliptique, alors il existe un nombre entier $r \geqslant 1$ tel que*

$$N_{\mathcal{M}}(B) \ll (\log B)^{r/2}.$$

2. *Si $\mathcal{C}$ est hyperelliptique de genre $g \geqslant 2$ ou que $\tilde{\mathcal{C}}$ est elliptique , alors*

$$N_{\mathcal{M}}(B) \ll B^{2/\deg \mathcal{M}}.$$

3. *Si $\mathcal{C}$ est de genre $g = 1$*

$$N_{\mathcal{M}}(B) \ll B^{4/\deg \mathcal{M}}.$$

*Démonstration.* Nous identifierons les éléments de $\mathrm{Sym}^2\,\mathcal{C}$ à des diviseurs effectifs de degré 2 sur $\mathcal{C}$. On peut supposer qu'il existe un point rationnel $x_0 + y_0 \in \mathrm{Sym}^2\,\tilde{\mathcal{C}}(K)$. On a alors un morphisme défini sur $K$

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_0 \colon & \mathrm{Sym}^2\,\tilde{\mathcal{C}} & \longrightarrow & \mathrm{Jac}(\tilde{\mathcal{C}}) \\ & x + y & \longmapsto & [x + y - x_0 - y_0] \end{array}$$

dont les fibres sont des espaces projectifs de dimension 0 ou 1. En effet, si $D = [x_1 + y_1 - x_0 - y_0]$, la fibre au-dessus de $D$ est l'espace projectif des diviseurs $E$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$, effectifs, de degré 2 et linéairement équivalents à $D + x_0 + y_0$. Elle est notée $|D + x_0 + y_0|$, soit $|x_1 + y_1|$. D'après le théorème de Riemann-Roch,

$$\dim |x_1 + y_1| = \dim |K_{\tilde{\mathcal{C}}} - (x_1 + y_1)| + 3 - g$$

et

$$\dim |K_{\tilde{\mathcal{C}}} - x_1| = \dim |x_1| + g - 2 = g - 2.$$

De plus,

$$\dim |K_{\tilde{\mathcal{C}}} - (x_1 + y_1)| \leqslant \dim |K_{\tilde{\mathcal{C}}} - x_1|.$$

Donc

$$\dim |x_1 + y_1| \leqslant 1.$$

Si $g = 1$, alors les fibres non vides sont toutes de dimension 1. De plus, la dimension de $|x_1 + y_1|$ est nulle pour tous $x_1, y_1$ si, et seulement si, la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas hyperelliptique.

Considérons par ailleurs un fibré en droites ample sur $\mathrm{Jac}(\tilde{\mathcal{C}})$, qui sera noté $\mathcal{L}_0$, et $H_{\mathcal{L}_0,K}$ une hauteur sur $\mathrm{Jac}(\tilde{\mathcal{C}})(K)$ relative à une métrique adélique sur ce fibré en droites. Il existe alors $b, c_1 > 0$ tels que

$$H_{\mathcal{L}_0,K} \circ \varphi_0 \leqslant c_1 (H_{\mathcal{L}_{\rho^* \mathcal{M},2},K})^b.$$

Intéressons-nous au cas où $\mathcal{C}$, de genre $g \geqslant 2$, n'est pas hyperelliptique. Le morphisme $\varphi_0$ est alors un plongement. Ainsi,

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{M}}(B) &\leqslant \#\{D \in \mathrm{Jac}(\tilde{\mathcal{C}})(K) \mid H_{\mathcal{L}_0,K}(D) \ll B^b\} \\ &\ll (\log B)^{r/2}, \end{aligned}$$

d'après le théorème 6 de [29].

Si maintenant la courbe $\mathcal{C}$ est hyperelliptique de genre $g \geqslant 2$, le morphisme $\varphi_0$ admet une fibre de dimension 1 et celle-ci est unique, d'après [20, IV, proposition 5.3]. Le morphisme $\varphi_0$ contracte donc une unique courbe rationnelle que nous noterons $C_0$. En appliquant le théorème 2.13 à $\mathrm{Sym}^1 C_0$ nous obtenons

$$\#\{y \in C_0(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\rho^* \mathcal{M},2},K}(y) \leqslant B\} \ll B^{2/a},$$

avec $a = [\mathcal{L}_{\mathcal{M},2}].C_0 \geqslant \deg \mathcal{M}$. D'autre part, le morphisme induit

$$\varphi_0 \colon (\mathrm{Sym}^2 \tilde{\mathcal{C}}) - C_0 \longrightarrow \mathrm{Jac}(\tilde{\mathcal{C}})$$

est injectif. Ainsi

$$\begin{aligned}\#\{y \in \operatorname{Sym}^2 \tilde{\mathcal{C}}(K) - C_0(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2},K}(y) \leqslant B\} \\ \leqslant \#\{D \in \operatorname{Jac}(\tilde{\mathcal{C}})(K) \mid H_{\mathcal{L}_0,K}(D) \leqslant B^b/c_1\} \\ \ll (\log B)^{r/2},\end{aligned}$$

toujours d'après le théorème 6 de [29], ce qui est négligeable par rapport à la contribution de $C_0(K)$.

Terminons par le cas où $g = 1$. Supposons d'abord que $\tilde{\mathcal{C}}$ est une courbe elliptique sur $K$. On se fixe un plongement

$$\tilde{\mathcal{C}} \hookrightarrow \mathbf{P}^2$$

donné par un modèle de Weierstrass. Notons $+$ la loi de groupe sur $\mathcal{C}$. Nous avons un morphisme

$$\begin{array}{rccc}\varphi\colon & \operatorname{Sym}^2 \tilde{\mathcal{C}} & \to & \tilde{\mathcal{C}} \\ & \pi(x,y) & \mapsto & x+y\end{array}$$

dont les fibres sont des droites projectives. Par ailleurs, nous avons

$$\begin{array}{rccc}g\colon & \operatorname{Sym}^2 \tilde{\mathcal{C}} & \to & (\mathbf{P}^2)^\vee \\ & \pi(x,y) & \mapsto & \mathcal{D}_{x,y}\end{array}$$

où $D_{x,y}$ est la droite de $\mathbf{P}^2$ passant par $x$ et $y$, si ceux-ci sont distincts, ou alors la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en $x$, si $x = y$. Le fibré en droites $\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2}$ peut s'écrire

$$\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2} = \varphi^*\mathcal{M}_0 \otimes g^*\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a).$$

Par ailleurs, en notant

$$D_0 = \varphi^{-1}(0_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \{\pi(x,-x), x \in \tilde{\mathcal{C}}\}$$

nous avons

$$\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2}|_{D_0} = g^*\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a).$$

De plus

$$\deg(\pi^*\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2}|_{D_0}) = 2\deg\mathcal{M}$$

et

$$\deg(\pi^* g^*\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a)) = 2a.$$

Donc $a = \deg \mathcal{M}$. Nous pouvons également montrer que $\mathcal{M}_0 = \rho^*\mathcal{M}$. En effet, avec $j\colon \tilde{\mathcal{C}} \to \tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}}$, $x \mapsto (x, 0)$, on obtient

$$j^*\pi^*g^*\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(1) = \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{C}}}$$

et donc

$$\rho^*\mathcal{M} = j^*\pi^*\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2} = j^*\pi^*\varphi^*\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2} = \varphi^*\rho^*\mathcal{M} \otimes g^*\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a)$$

avec $a = \deg \mathcal{M}$. Soit $\pi(x,y) \in \operatorname{Sym}^2 \mathcal{C}(K)$. Alors

$$H_{\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2},K}(\pi(x,y)) = H_{\rho^*M,K}(x+y)H_{\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a),K}(\mathcal{D}_{x,y}).$$

De plus,

$$H_{\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a),K}(\mathcal{D}_{x,y}) \gg 1.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{M}}(B) &\leqslant \#\{\alpha \in \operatorname{Sym}^2 \tilde{\mathcal{C}}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2},K}(\alpha) \leqslant B\} \\
&\ll \sum_{\substack{z \in \tilde{\mathcal{C}}(K) \\ H_{\rho^*\mathcal{M},K}(z) \ll B}} \#\{\pi(x,y) \in \varphi^{-1}(z)(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2},K}(\pi(x,y)) \leqslant B\} \\
&\ll \sum_{\substack{z \in \tilde{\mathcal{C}}(K) \\ H_{\rho^*\mathcal{M},K}(z) \ll B}} \#\{\mathcal{D} \in D_z(K) \mid H_{\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a),K}(\mathcal{D}) \leqslant B/H_{\rho^*\mathcal{M},K}(z)\}
\end{aligned}$$

où $D_z$ est la droite de $(\mathbf{P}^2)^\vee$ formée des $\mathcal{D}_{x,y}$ tels que $x + y = z$. Par dualité, c'est aussi la droite de $\mathbf{P}^2$ dont les coefficients sont donnés par les coordonnées de $-z$. D'après [12, théorème 0.1], nous avons

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{M}}(B) &\ll \sum_{\substack{z \in \tilde{\mathcal{C}}(K) \\ H_{\rho^*\mathcal{M},K}(z) \ll B}} \left(\frac{B}{H_{\rho^*\mathcal{M},K}(z)}\right)^{2/a} \frac{1}{H_{\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^2)^\vee}(a),K}(D_z)} \\
&\ll B^{2/a} \sum_{\substack{z \in \tilde{\mathcal{C}}(K) \\ H_{\rho^*\mathcal{M},K}(z) \ll B}} \frac{1}{H_{\rho^*\mathcal{M},K}(z)^{2/a+1}} \\
&\ll B^{2/a}.
\end{aligned}$$

Enfin, si $\tilde{\mathcal{C}}$ est de genre 1 mais ne possède pas de point sur $K$, elle en possède un sur une extension $L$ de $K$. La courbe $\tilde{\mathcal{C}}$ est alors elliptique sur $L$. De plus, on peut supposer que $L$ est quadratique sur $K$ car sinon $\mathrm{Sym}^2\,\tilde{\mathcal{C}}(K)$ est vide. Alors

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{M}}(B) &\leqslant \#\{\alpha \in \mathrm{Sym}^2\,\tilde{\mathcal{C}}(K) \mid H_{\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2},K}(\alpha) \leqslant B\} \\ &\leqslant \#\{\alpha \in \mathrm{Sym}^2\,\tilde{\mathcal{C}}(L) \mid H_{\mathcal{L}_{\rho^*\mathcal{M},2},L}(\alpha) \leqslant B^2\} \\ &\ll B^{4/a} \end{aligned}$$

avec $a = \deg \mathcal{M}$, d'après le cas précédent. $\square$

# CHAPITRE 3

---

# ÉTUDE DE LA CONJECTURE DE MANIN POUR LE PRODUIT SYMÉTRIQUE D'UNE SURFACE

Dans tout ce chapitre, $X$ sera une surface projective lisse de Fano, définie sur $K$ et $m$ sera un entier au moins égal à 2.

La variété $\operatorname{Sym}^m X$ est alors singulière, son lieu singulier étant

$$D = \pi(\Delta), \tag{3.1}$$

où

$$\Delta = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid x_i = x_j\}. \tag{3.2}$$

La conjecture 1.24 ne portant que sur des variétés lisses, il est nécessaire de passer par une désingularisation. Le schéma de Hilbert de $m$ points sur $X$, noté $\operatorname{Hilb}^m X$, est une variété projective lisse de dimension $2m$ et le morphisme birationnel de Hilbert-Chow (voir [16, 28])

$$\varepsilon\colon \operatorname{Hilb}^m X \to \operatorname{Sym}^m X$$

est une résolution des singularités de $\operatorname{Sym}^m X$. En dimension supérieure, aucune désingularisation de $\operatorname{Sym}^m X$ n'est connue, c'est pourquoi nous supposons ici que $X$ est une surface.

Le but de ce chapitre est d'étudier la conjecture 1.24 sur $\operatorname{Hilb}^m X$. Celle-ci faisant intervenir le fibré anticanonique, le groupe de Picard et le cône effectif, nous commencerons par étudier ces invariants géométriques du schéma de Hilbert ponctuel. Nous énoncerons ensuite la conjecture puis étudierons quelques phénomènes d'accumulation. En particulier nous montrerons que, sous certaines conditions, la variété $\mathrm{Hilb}^m X$ fournit un contre-exemple à la conjecture de Batyrev-Manin (conjecture 1.24 forte). Nous étudierons également si les courbes de $X$ peuvent induire un sous-ensemble accumulateur dans $\mathrm{Sym}^m X$.

## 3.1 Schéma de Hilbert ponctuel d'une surface

Soit $X$ une surface projective lisse définie sur un corps de nombres $K$. Le schéma de Hilbert de $m$ points sur $X$ paramètre les sous-schémas fermés de dimension nulle de $X$ et de longueur $m$. Il existe un morphisme birationnel (voir [16, 28])

$$\varepsilon\colon \mathrm{Hilb}^m X \to \mathrm{Sym}^m X,$$

qui à un sous-schéma fermé associe le 0-cycle correspondant, qui sera vu comme un point de $\mathrm{Sym}^m X$. Ce morphisme induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hilb}^m X - E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^m X - D$$

avec $E = \varepsilon^{-1}(D)$, diviseur irréductible de $\mathrm{Hilb}^m X$.

### 3.1.1 Groupe de Picard et fibré canonique

Nous reprenons ici des éléments de [17] et [7] concernant le groupe de Picard et le fibré canonique de $\mathrm{Hilb}^m X$.

Notons $\mathrm{Sym}^m_* X$ l'ensemble des 0-cycles effectifs de degré $m$ sur $X$ dont le support contient au moins $m-1$ points et

$$\mathrm{Hilb}^m_* X = \varepsilon^{-1}\Big(\mathrm{Sym}^m_* X\Big).$$

Alors le complémentaire de $\mathrm{Hilb}^m_* X$ dans $\mathrm{Hilb}^m X$ est de codimension 2. Soient enfin $X^m_* = \pi^{-1}\Big(\mathrm{Sym}^m_* X\Big)$ et $D_*$ le sous-ensemble de $D$, défini en (3.1), donné par

$$D_* = \{\pi(a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) \in \mathrm{Sym}^m X \mid a_i \in X \text{ 2 à 2 distincts}\}.$$

Notons $\widetilde{X_*^m}$ l'éclatement de $\Delta$, défini en (3.2), dans $X_*^m$. Alors $\mathrm{Hilb}_*^m X$ s'identifie à $\widetilde{X_*^m}$ quotienté par l'action de $\mathfrak{S}_m$, ou encore à l'éclatement de $D_*$ dans $\mathrm{Sym}_*^m X$. Nous obtenons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X_*^m} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\rho"'] & X_*^m \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Hilb}_*^m X \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{Sym}_*^m X
\end{tikzcd}$$

où $\eta$ est l'éclatement de $\Delta \cap X_*^m$. Considérons alors les isomorphismes

$$\lambda\colon \mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}^m X) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}_*^m X)$$

et

$$\mu\colon (\mathrm{Pic}\, X_*^m)^{\mathfrak{S}_m} \times \mathbf{Z} \to (\mathrm{Pic}\, \widetilde{X_*^m})^{\mathfrak{S}_m},$$

induit par $\eta$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}^m X) \arrow[r, "\simeq", "\lambda"'] \arrow[drrr, bend right, "\tau"'] & \mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}_*^m X) \arrow[d, "\rho^*"] & & \\
& \mathrm{Pic}(\widetilde{X_*^m}) & \mathrm{Pic}(X_*^m)^{\mathfrak{S}_m} \times \mathbf{Z} \arrow[l, "\sim"', "\mu"] & \mathrm{Pic}(X^m)^{\mathfrak{S}_m} \times \mathbf{Z} \arrow[l, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Alors le morphisme de groupes

$$\tau = (\pi^* \times id)^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \rho^* \circ \lambda\colon \mathrm{Pic}\Big(\mathrm{Hilb}^m X\Big) \longrightarrow \mathrm{Pic}\Big(X^m\Big)^{\mathfrak{S}_m} \times \mathbf{Z}$$

est une bijection ([17]). Il envoie le diviseur $E$ sur un générateur du facteur $\mathbf{Z}$. Ceci permet de déterminer le groupe de Picard de $\mathrm{Hilb}^m X$.

**Proposition 3.1.** *Soit $X$ une surface projective lisse de Fano définie sur un corps de nombres $K$. Alors, pour $m \geqslant 2$,*

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}^m X) \simeq \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbf{Z}E.$$

*Démonstration.* D'après ce qui précède, $\mathrm{Pic}\Big(\mathrm{Hilb}^m X\Big)$ est isomorphe à

$\operatorname{Pic}\left(X^m\right)^{\mathfrak{S}_m} \oplus \mathbf{Z}E$. Or, en caractéristique nulle, la variété d'Albanese d'une variété de Fano est de dimension nulle (par le théorème d'annulation de Kodaira ou [13, p. 79] et [20, III.9.3]), donc triviale. On en déduit que $\operatorname{Pic}\left(X^m\right)^{\mathfrak{S}_m}$ est isomorphe à $\operatorname{Pic} X$ ([17, (6') p. 678]). □

**Remarque 3.2.** Ce résultat est toujours valable si la variété $X$ n'est pas forcément de Fano mais que sa variété d'Albanese est triviale.

Intéressons-nous maintenant au fibré canonique de $\operatorname{Hilb}^m X$. D'après [2, théorème 4.12], puisque $\operatorname{Sym}^m X$ est le quotient d'une variété lisse par un groupe fini d'automorphismes, elle est $\mathbf{Q}$-factorielle. Ceci signifie qu'elle est normale et que tout diviseur de Weil a un multiple non nul qui est de Cartier. De plus, d'après le théorème 3 de [40], la variété $\operatorname{Sym}^m X$ est Gorenstein dont possède un faisceau dualisant qui est localement libre.

**Proposition 3.3.** *La résolution $\varepsilon$ est crépante, ce qui signifie que*

$$\omega_{\operatorname{Hilb}^m X} = \varepsilon^* \omega_{\operatorname{Sym}^m X},$$

*où $\omega_{\operatorname{Sym}^m X}$ est le faisceau dualisant de $\operatorname{Sym}^m X$. De plus, le fibré en droites $\mathcal{L}_{X,m}$ est l'inverse du faisceau $\omega_{\operatorname{Sym}^m X}$.*

*Démonstration.* Soit $\omega$ une 2-forme sur $X$. Elle induit une $2m$-forme $\omega_m$ sur $X^m_*$ donnée par

$$\omega_m = (p_1^*\omega + \cdots + p_m^*\omega)^m,$$

où $p_i \colon X^m \to X$ désigne la $i$-ième projection. Les formes $\eta^*\omega_m$ sur $\widetilde{X^m_*}$ et $\omega_m$ sur $X^m_*$ sont invariantes sous l'action du groupe $\mathfrak{S}_m$ donc proviennent respectivement d'une $2m$-forme $\omega_{[m]}$ sur $\operatorname{Hilb}^m_* X$ et d'une $2m$-forme $\omega_{(m)}$ sur $\operatorname{Sym}^m_* X$. Nous avons donc

$$\rho^*\omega_{[m]} = \eta^*\omega_m \qquad \text{et} \qquad \pi^*\omega_{(m)} = \omega_m.$$

De plus, d'après [2, théorème 4.12], $\operatorname{Sym}^m X$ est $\mathbf{Q}$-factorielle. Ainsi, il existe un diviseur de Cartier $D_{(m)}$ sur $\operatorname{Sym}^m X$ et un nombre rationnel $k \in \mathbf{Q}^*$ tels que

$$k\operatorname{div}(\omega_{(m)})_{|V_0} = D_{(m)}{}_{|V_0}.$$

Il existe une $2m$-forme locale non nulle $s_{(m)}$ et une fonction rationnelle

$f_{(m)}$ sur $\mathrm{Sym}^m_* X$ telles que, localement,

$$D_{(m)} = \mathrm{div}(f_{(m)} s_{(m)}).$$

Notons $D_{[m]} = \varepsilon^* D_{(m)}$, $s_{[m]} = \varepsilon^* s_{(m)}$ qui est une $2m$-forme locale sur $\mathrm{Hilb}^m_* X$ et $f_{[m]} = \varepsilon^* f_{(m)}$ qui est une fonction rationnelle. Nous avons localement

$$D_{[m]} = \mathrm{div}(f_{[m]} s_{[m]}).$$

D'après la proposition 5 p. 766 de [7], $\mathrm{div}(s_{[m]}) = 0$. Nous en déduisons que $\mathrm{div}(s_{(m)}) = 0$. Ainsi, nous obtenons localement

$$D_{(m)} = \varepsilon^* \mathrm{div}(f_{(m)}) = \mathrm{div}(\varepsilon^* f_{(m)}) = \mathrm{div}(f_{[m]}) = D_{[m]}$$

donc

$$\varepsilon^* \mathrm{div}(\omega_{(m)}) = \mathrm{div}(\omega_{[m]})$$

et de même, toujours localement,

$$\pi^* \mathrm{div}(\omega_{(m)}) = \mathrm{div}(\omega_m).$$

Par conséquent,

$$\varepsilon^* \omega_{\mathrm{Sym}^m X} = \omega_{\mathrm{Hilb}^m X}$$

et

$$\pi^* \omega_{\mathrm{Sym}^m X} = \omega_{X^m}.$$

□

**Corollaire 3.4.** *Le fibré anticanonique de* $\mathrm{Hilb}^m X$ *est gros.*

*Démonstration.* Comme le morphisme $\varepsilon$ est birationnel et que le fibré en droites $\mathcal{L}_{X,m} = \omega^{-1}_{\mathrm{Sym}^m X}$ est ample donc gros, nous déduisons de la relation

$$\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X} = \varepsilon^* \mathcal{L}_{X,m}$$

que le fibré an droites $\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X}$ est gros (voir [24, p. 139]). □

### 3.1.2 Cône effectif

Le cône effectif de $X$, fermeture du cône de $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs, intervient dans la définition de la constante de Peyre. Nous ne donnerons pas de définition générale de cette constante (on pourra consulter [31] pour celle-ci), mais la calculerons dans les cas de $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ et de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$ au paragraphe 3.2.3. Dans cette optique, nous déterminons ici les cônes effectifs de ces deux variétés.

### Cône effectif de $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$

Le cône effectif de $\mathrm{Hilb}^m\,\mathbf{P}^2$ a été récemment déterminé par Huizenga [21, 22], pour tout entier $m$. Nous proposons ici une démonstration élémentaire du cas $m=2$. Le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)$ peut être vu comme l'éclaté de $\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2$ le long de la diagonale $\Delta$, quotienté par l'action du groupe $\mathfrak{S}_2$. Nous avons déjà vu que

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2)=\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^2)\oplus\mathbf{Z}E=\mathbf{Z}H\oplus\mathbf{Z}E,$$

où, toujours avec les notations du paragraphe 3.1.1, $\rho^*H=\eta^*[\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2}(1,1)]$.

**Proposition 3.5.** *Le cône effectif de* $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ *est*

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H-E)\oplus\mathbf{R}_{\geqslant 0}E.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, le diviseur $E$ est effectif et, si $aH+bE$, avec $a,b\in\mathbf{Z}$, est effectif, alors en tirant par $\rho$ ce diviseur puis en le poussant par $\eta$ sur $\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2$, on remarque que nécessairement $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2}(a,a)$ est effectif, donc $a\geqslant 0$. Soit maintenant $L=aH-bE$, avec $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ et $ab\neq 0$. On a

$$\rho^*L=\eta^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2}(a,a)-b\mathcal{E},$$

où $\mathcal{E}=\eta^{-1}(\Delta)$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Si le diviseur $L$ est effectif, alors, sur la carte affine $\mathbf{A}^2\times\mathbf{A}^2$, on obtient (en tirant $L$ par $\rho$ puis en poussant par $\eta$) le diviseur d'un polynôme $P\in K[X,Y,X',Y']$ s'annulant au moins à l'ordre $b$ le long de $\begin{cases}X=X'\\ Y=Y'\end{cases}$ et vérifiant

$$\deg_{(X,Y)}(P)\leqslant a,\quad \deg_{(X',Y')}(P)\leqslant a.$$

Un tel polynôme est élément de l'idéal $(X-X',Y-Y')^b$.
Notons $U=X-X'$ et $V=Y-Y'$. Alors, nous pouvons écrire $P$ sous la forme

$$P(X,Y,X',Y')=\sum_{u+v\geqslant b}P_{u,v}(X,Y)U^uV^v=Q(X,Y,U,V).$$

D'une part, $\deg_{(U,V)}(Q) \geqslant b$ et d'autre part, $\deg_{(U,V)}(Q) \leqslant \deg_{(X',Y')}(P)$. Ainsi, $0 \leqslant b \leqslant a$. Le cône effectif est donc inclus dans le cône

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}E.$$

Réciproquement, $H - E$ est bien un diviseur effectif car, sur $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$, le polynôme homogène

$$P(X, Y, Z, X', Y', Z') = XY' - X'Y + YZ' - ZY' + XZ' - ZX'$$

est de degré 1 en $(X, Y, Z)$ et en $(X', Y', Z')$ et s'annule à l'ordre 1 le long de $[X : Y : Z] = [X' : Y' : Z']$. □

### Cône effectif de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$

Nous réalisons ici la même étude pour $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$. Le groupe de Picard est dans ce cas

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)) = \mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \oplus \mathbf{Z}E = \mathbf{Z}H_1 \oplus \mathbf{Z}H_2 \oplus \mathbf{Z}E,$$

$\rho^* H_1 = \eta^*[\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2}(1, 0, 1, 0)]$ et $\rho^* H_2 = \eta^*[\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2}(0, 1, 0, 1)]$.

**Proposition 3.6.** *Le cône effectif de* $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ *est*

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_1 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_2 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}E.$$

*Démonstration.* Comme précédemment, le diviseur $E$ est effectif et si le diviseur $aH_1 + bH_2 + cE$ est effectif, alors $\mathcal{O}_{(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2}(a, b, a, b)$ est effectif, donc $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. Soit $L = aH_1 + bH_2 - cE$, avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ et $abc \neq 0$. Si le diviseur $L$ est effectif, alors, sur $(\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1)^2$, il induit le diviseur d'un polynôme $P \in K[X, Y, X', Y']$ s'annulant au moins à l'ordre $c$ le long de

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \end{cases}$$

et vérifiant

$$\deg_X(P) \leqslant a, \quad \deg_{X'}(P) \leqslant a, \quad \deg_Y(P) \leqslant b, \quad \deg_{Y'}(P) \leqslant b.$$

Un tel polynôme est élément de l'idéal $(X - X', Y - Y')^c$. Notons toujours

$U = X - X'$ et $V = Y - Y'$. Alors

$$P(X, Y, X', Y') = \sum_{u+v \geqslant c} P_{u,v}(X, Y) U^u V^v = Q(X, Y, U, V).$$

On en déduit que

$$0 \leqslant c \leqslant \deg_U(Q) + \deg_V(Q) \leqslant \deg_{X'}(P) + \deg_{Y'}(P) \leqslant a + b.$$

Le cône effectif est donc inclus dans le cône

$$\mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_1 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0}(H_2 - E) \oplus \mathbf{R}_{\geqslant 0} E.$$

Réciproquement, $H_1 - E$ est bien un diviseur effectif car le polynôme homogène

$$P(X, Z, Y, T, X', Z', Y', T') = XZ' - ZX'$$

est de degré 1 en $X, X', Z$ et $Z'$, de degré 0 en $Y, Y', T$ et $T'$ et s'annule à l'ordre 1 le long de $([X : Z], [Y : T]) = ([X' : Z'], [Y' : T'])$. De la même façon, on montre que $H_2 - E$ est également effectif. $\square$

## 3.2 Points rationnels du schéma de Hilbert ponctuel

Revenons maintenant à la conjecture 1.24, que nous souhaitons formuler pour le schéma de Hilbert ponctuel d'une surface.

Rappelons que $X$ est une surface projective lisse de Fano. On munit $X(\bar{\mathbf{Q}})$ d'une hauteur absolue $H_{\omega_X^{-1}}$ définie par une métrique adélique sur le fibré en droites $\omega_X^{-1}$. Nous avons déjà défini une hauteur $H_{\mathcal{L}_{X,m},K}$ sur $\operatorname{Sym}^m X(K)$ relative au fibré en droites $\mathcal{L}_{X,m} = \omega_{\operatorname{Sym}^m X}^{-1}$. Celle-ci induit naturellement, via le morphisme de Hilbert-Chow

$$\varepsilon\colon \operatorname{Hilb}^m X \to \operatorname{Sym}^m X,$$

une hauteur sur $\operatorname{Hilb}^m X(K)$, relative au fibré en droites $\varepsilon^* \mathcal{L}_{X,m} = \omega_{\operatorname{Hilb}^m X}^{-1}$ et vérifiant

$$H_{\omega_{\operatorname{Hilb}^m X}^{-1}, K} = H_{\mathcal{L}_{X,m},K} \circ \varepsilon.$$

### 3.2.1 Propriété de Northcott

Tout d'abord, puisque le morphisme $\varepsilon$ est birationnel et que $\mathcal{L}_{X,m}$ est ample, le fibré en droites $\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X}$ est gros. Il n'est en revanche pas ample. La propriété de finitude de Northcott sera vérifiée sur un ensemble ouvert de $\mathrm{Hilb}^m X$, éventuellement strict. Nous déterminons ici l'ensemble ouvert maximal sur lequel nous avons la propriété de Northcott.

**Proposition 3.7.** *1. Pour toute extension finie $L$ de $K$ et tout nombre réel $B$, l'ensemble*

$$\{z \in (\mathrm{Hilb}^m X - E)(L) \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},L}(z) \leqslant B\}$$

*est fini.*

*2. Pour tout ensemble ouvert non vide $U$ de $E$ défini sur $K$, il existe une extension finie $L$ de $K$ et un nombre réel $B$ tels que l'ensemble*

$$\{z \in U(L) \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},L}(z) \leqslant B\}$$

*soit infini.*

*Démonstration.* La première partie se déduit du fait que $\varepsilon$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Hilb}^m X - E$ sur $\mathrm{Sym}^m X - D$ et que, puisque $\mathcal{L}_{X,m}$ est ample, la propriété de Northcott est vérifiée sur $\mathrm{Sym}^m X$ pour la hauteur $H_{\mathcal{L}_{X,m},L}$. Montrons maintenant la deuxième partie. Soit $U$ un ensemble ouvert non vide de $E$ défini sur $K$. Puisque $E_* = \varepsilon^{-1}(D_*)$ est un ensemble ouvert non vide de $E$, $U \cap E_*$ est également un ensemble ouvert non vide de $E$ défini sur $K$. L'ensemble $U \cap E_*(\bar{K})$ est non vide et donc il existe une extension finie $L$ de $K$ et un point $z_0 \in (U \cap E_*)(L)$. Notons $y_0 = \varepsilon(z_0) \in D_*(L)$. D'après [17, lemme 4.3], la fibre $W_0 = \varepsilon^{-1}(\{y_0\})$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1_K$ et, de plus, $U \cap W_0$ est un ensemble ouvert non vide de $W_0$. Ainsi, $(U \cap W_0)(L)$ est un ensemble infini et tous ses points ont même hauteur, égale à $H_{\mathcal{L}_{X,m},L}(y_0)$. Il suffit alors de prendre $B = H_{\mathcal{L}_{X,m},L}(y_0)$. □

Il est donc raisonnable d'écarter l'ensemble $E(K)$ pour l'étude de la conjecture de Manin sur $\mathrm{Hilb}^m X(K)$.

### 3.2.2 Énoncé de la conjecture

D'après la proposition 3.1, le rang du groupe de Picard de $\mathrm{Hilb}^m X$ est égal à $\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\, X) + 1$. Ainsi, la conjecture 1.24 se formule, pour cette variété, de la manière suivante.

**Conjecture 3.8.** *Soient $X$ une surface projective lisse de Fano définie sur $K$ et $m \geqslant 2$ un nombre entier. Il existe une extension finie $L$ de $K$ et un ensemble mince $Z$ de $\mathrm{Hilb}^m X(L)$ tels que, lorsque $B$ tend vers l'infini*

$$\#\{z \in \mathrm{Hilb}^m X(L) - Z \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},L}(z) \leqslant B\} \sim c\,B(\log B)^t,$$

*où $t = \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\,X)$ et*

$$c = C_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},L}}(\mathrm{Hilb}^m X) > 0$$

*est la constante définie par Peyre.*

Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition 3.7, l'ensemble mince exceptionnel $Z$ doit contenir au moins l'ensemble des points rationnels de $E = \varepsilon^{-1}(D)$. Nous développerons dans la suite les cas de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$. Pour chacun d'eux, nous montrerons la conjecture 3.8 avec pour $Z$ un ensemble mince et dense.

Comme précédemment, nous parlerons de la *conjecture 3.8 forte* lorsqu'il sera supposé que l'ensemble $Z$ est l'ensemble des points rationnels d'un fermé strict de $\mathrm{Hilb}^m X$.

Puisque nous nous sommes d'abord intéressée au nombre de points rationnels de hauteur bornée sur le produit symétrique, voici la traduction de cette conjecture sur $\mathrm{Sym}^m X$.

**Conjecture 3.9.** *Soient $X$ une surface projective lisse de Fano définie sur $K$ et $m \geqslant 2$ un nombre entier. Il existe une extension finie $L$ de $K$ et un ensemble mince $Y$ de $\mathrm{Sym}^m X(L)$ tels que*

$$\#\{y \in \mathrm{Sym}^m X(L) - Y \mid H_{\mathcal{L}_{X,m},L}(y) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c\,B(\log B)^{\mathrm{rg}(\mathrm{Pic}\,X)},$$

*avec*

$$c = C_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^m X},L}}(\mathrm{Hilb}^m X) > 0.$$

### 3.2.3 Constantes de Peyre pour les variétés $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ et $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$

Nous allons maintenant préciser la conjecture 3.8 dans les cas de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ et $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ en calculant les constantes de Peyre $C_{\mathcal{H}}(\mathrm{Hilb}^2 X)$ définie par (1.1) pour les surfaces $X = \mathbf{P}^2$ et $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et pour certaines hauteurs anticanoniques

$$\mathcal{H} = H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2 X}, K}.$$

Commençons par le cas de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$. Nous avons $\omega^{-1}_{\mathbf{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)$.

### Avec la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^2$

**Proposition 3.10.** *Considérons sur* $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ *la hauteur absolue anticanonique*

$$H_{\omega^{-1}_{\mathbf{P}^2}} = H_2^3,$$

*où* $H_2$ *est la hauteur absolue usuelle sur* $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$*. La hauteur* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2(K)$ *induite par celle-ci vérifie*

$$C_{\mathcal{H}}(\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2) = \frac{2^{3r_K+5s_K} 3^{r_K+2s_K} \pi^{6s_K} h_K^2 R_K^2}{9 w_K^2 \left|\Delta_K\right|^3 \zeta_K(3)^2} (12+\pi^2)^{r_K}.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 3.5,

$$C^{\vee}_{\mathrm{eff}}(\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2) = \{aH + bE,\ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid a - b \geqslant 0,\ b \geqslant 0\}$$

et par ailleurs,

$$\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2} = 3H.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \alpha(\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2}) &= \frac{1}{(2-1)!} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}b \int_b^{+\infty} \mathrm{e}^{-3a}\ \mathrm{d}a \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3b}\ \mathrm{d}b \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le nombre de Tamagawa associé à la hauteur $\tilde{H}$ est ici donné par

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2) = \lim_{s \to 1} (s-1)^2 \zeta_K(s)^2 \frac{1}{\Delta_K^2} \prod_{v \in M_K} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_v(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(K_v)).$$

Le terme $\lambda_v$ garantit la convergence du produit infini. Lorsque la place $v$ est infinie, celui vaut 1 et, lorsque $v \in M_K$ est une place finie correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}_v$ de $\mathcal{O}_K$, nous avons

$$\lambda_v = \left(1 - \frac{1}{q_v}\right)^2,$$

où $q_v$ est la norme de l'idéal $\mathfrak{p}_v$. Dans ce second cas, puisque la métrique $\|\cdot\|_v$ est la métrique induite par le modèle entier, d'après le lemme 1.30 nous avons

$$\boldsymbol{\omega}_{\tilde{H},v}(\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(K_v)) = \frac{\# \operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{F}_{q_v})}{q_v^4}$$

Or les points de $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{F}_q)$ sont d'exactement un des trois types suivants.

1. Nous avons tout d'abord les points de $E(\mathbf{F}_q)$. Puisque les fibres de $\varepsilon$ au dessus de $D$ sont isomorphes à des droites projectives $\mathbf{P}^1$, nous avons
$$\#E(\mathbf{F}_q) = (q^2 + q + 1)(1 + q) = q^3 + 2q^2 + 2q + 1.$$
2. Ensuite, les points réductibles, de la forme $\varepsilon^{-1}(\pi(a, b))$ avec $a, b$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)$ et $a \neq b$, sont au nombre de
$$\frac{1}{2}(q^2 + q + 1)(q^2 + q) = \frac{1}{2}q^4 + q^3 + q^2 + \frac{1}{2}q.$$
3. Enfin, les points irréductibles, de la forme $\varepsilon^{-1}(\pi(a, \bar{a}))$ avec $a \in \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_{q^2}) \setminus \mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)$ et $\bar{a}$ est son conjugué, sont au nombre de
$$\frac{1}{2}((q^4 + q^2 + 1) - (q^2 + q + 1)) = \frac{1}{2}q^4 - \frac{1}{2}q.$$

Par conséquent, $\# \operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{F}_{q_v}) = {q_v}^4 + 2{q_v}^3 + 3{q_v}^2 + 2q_v + 1$. Ainsi,

$$\prod_{v \nmid \infty} \lambda_v \boldsymbol{\omega}_v(\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(\mathbf{K}_v)) = \prod_{v \nmid \infty} \left(1 - \frac{1}{q_v^3}\right)^2 = \zeta_K(3)^{-2}.$$

Passons aux volumes archimédiens. Nous noterons $U_0 = \operatorname{Hilb}^2 \mathbf{P}^2 - E$ et $V_0 = \operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2 - D$. Lorsque $v \in M_K$ est une place archimédienne,

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H},v}(\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^2)(K_v)) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H},v}(U_0(K_v)) = \boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_0(K_v)),$$

avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbf{P}^2,2}$, car la résolution $\varepsilon$ est crépante. Dans le cas des places réelles, c'est-à-dire telles que $K_v \simeq \mathbf{R}$, l'ensemble $V_0(\mathbf{R})$ se divise en deux sous-ensembles mesurables

$$V_r(\mathbf{R}) = \{\pi(x,y) \in \operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid x, y \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}),\ x \neq y\}$$

et

$$V_i(\mathbf{R}) = \{\pi(x,\bar{x}) \in \operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \mid x \in \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) - \mathbf{P}^2(\mathbf{R})\},$$

où $\bar{x}$ désigne le conjugué complexe de $x$. La volume du premier est

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_r(\mathbf{R})) &= \frac{1}{2}\int_{(\mathbf{R}^2)^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\max\{1,|x_1|,|x_2|\}^3 \max\{1,|y_1|,|y_2|\}^3}\\ &= 72\end{aligned}$$

et celui du second

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_i(\mathbf{R})) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^2} \frac{\mathrm{d}x}{\max\{1,|x_1|,|x_2|\}^6}\\ &= \frac{1}{2}\int_{([0;+\infty[\times[0,2\pi])^2} \frac{(2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta)(2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi)}{\max\{1,r,\rho\}^6}\\ &= 8\pi^2 \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{r\rho\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\rho}{\max\{1,r,\rho\}^6}\\ &= 6\pi^2.\end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas réel,

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_0(K_v)) = 72 + 6\pi^2.$$

Dans le cas complexe, nous obtenons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_0(K_v)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^4} \frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{(\max\{1,|x_1|,|y_1|\}\max\{1,|x_2|,|y_2|\})^6}\\ &= 72\pi^4.\end{aligned}$$

Enfin, comme nous l'avons déjà mentionné,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\zeta_K(z) = \frac{2^{r_K}(2\pi)^{s_K} h_K R_K}{w_K\sqrt{|\Delta_K|}}.$$

□

**Remarque 3.11.** Lorsque le corps de base est le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, cette constante est égale à

$$C_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2}},\mathbf{Q}}(\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2) = \frac{24 + 2\pi^2}{3\zeta(3)^2}. \tag{3.4}$$

### Avec la hauteur euclidienne sur $\mathbf{P}^2$

Nous pouvons également considérer sur $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ la hauteur absolue euclidienne $H_{2,e}$ relative à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ et définie pour $x = [x_0 : x_1 : x_2]$ dans $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ par

$$H_{2,e}(x) = \prod_{v \nmid \infty} \max\{|x_0|_v, |x_1|_v, |x_2|_v\}^{\frac{[L_v:\mathbf{Q}_v]}{[L:\mathbf{Q}]}} \prod_{v \mid \infty} \left(|x_0|_v^2 + |x_1|_v^2 + |x_2|_v^2\right)^{\frac{[L_v:\mathbf{Q}_v]}{2[L:\mathbf{Q}]}},$$

où $L$ est un corps de nombres quelconque tel que $x \in \mathbf{P}^2(L)$.

Nous vérifions alors, de la même manière que précédemment, la proposition suivante.

**Proposition 3.12.** *Considérons sur $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ la hauteur absolue anticanonique*

$$H_{\omega^{-1}_{\mathbf{P}^2}} = H^3_{2,e}.$$

*La hauteur $\mathcal{H}$ sur* $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2(K)$ *induite par celle-ci vérifie*

$$C_{\mathcal{H}}(\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2) = \frac{2^{2r_K+3s_K} 3^{r_K} \pi^{2r_K+6s_K} h_K^2 R_K^2}{9 w_K^2 |\Delta_K|^3 \zeta_K(3)^2}.$$

### Avec la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

Intéressons-nous maintenant à la variété $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$.

**Proposition 3.13.** *Considérons, sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$, la hauteur absolue anticanonique*

$$H_{\omega^{-1}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1}} : (x_1, x_2) \mapsto H_1^2(x_1) H_1^2(x_2).$$

*Alors la constante de Peyre pour la hauteur associée $\mathcal{H}$ sur l'ensemble*

$\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(K)$ *est égale à*

$$\frac{2^{6r_K+10s_K}\pi^{7s_K}h_K^3R_K^3}{32w_K^3\,|\Delta_K|^{7/2}}(16+\pi^2)^{r_K}\prod_{\substack{\mathfrak{p}\neq 0\\ \textit{idéal}\\ \textit{premier}}}\left(1-\frac{7}{\mathbf{N}(\mathfrak{p})^3}+\frac{7}{\mathbf{N}(\mathfrak{p})^4}-\frac{1}{\mathbf{N}(\mathfrak{p})^7}\right).$$

*Démonstration.* La preuve suivra le même schéma que celle de la proposition 3.10. Commençons par calculer la constante $\alpha(\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)})$. Nous avons

$$\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)} = 2H_1 + 2H_2$$

et d'après la proposition 3.6, le dual du cône effectif de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ est

$$\{aH_2 + bH_2 + cE,\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a-c \geqslant 0,\ b-c \geqslant 0,\ c \geqslant 0\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(3.5)\qquad \alpha(\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)}) &= \frac{1}{(3-1)!}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}c\int_c^{+\infty}\int_c^{+\infty}\mathrm{e}^{-2a-2b}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}c\left(\int_c^{+\infty}\mathrm{e}^{-2a}\,\mathrm{d}a\right)^2\\
&= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4c}\,\mathrm{d}c\\
&= \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$

Le nombre de Tamagawa $\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1))$ associé à $\mathcal{H}$ est égal à

$$\lim_{s\to 1}(s-1)^3\zeta_K(s)^3\frac{1}{\Delta_K^2}\prod_{v\in M_K}\lambda_v\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(K_v)).$$

Le terme de convergence $\lambda_v$ vaut 1 lorsque $v$ est une place infinie et si $v \in M_K$ est une place finie, correspondant à l'idéal premier $\mathfrak{p}_v$ de $\mathcal{O}_K$, ce terme vaut

$$\lambda_v = \left(1-\frac{1}{q_v}\right)^3,$$

où $q_v$ est la norme de l'idéal $\mathfrak{p}_v$. Comme précédemment,

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H},v}(\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(K_v)) = \frac{\#\,\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(\mathbf{F}_{q_v})}{q_v^4}.$$

De plus, $\#\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{F}_{q_v}) = 1 + 3q + 6q^2 + 3q^3 + q^4$. Ainsi, pour toute place finie $v$,

$$\lambda_v \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H},v}(\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{K}_v)) = 1 - \frac{7}{q_v^3} + \frac{7}{q_v^4} - \frac{1}{q_v^7}.$$

Passons aux volumes de $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(K_v)$ pour la mesure de Tamagawa aux places $v$ archimédiennes. Soit $U_0 = \operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) - E$, isomorphe par $\varepsilon$ à $V_0 = \operatorname{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) - D$. Puisque la résolution $\varepsilon$ est crépante,

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H},v}(\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(K_v)) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H},v}(U_0(K_v)) = \boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_0(K_v)),$$

Dans le cas où la place $v$ réelle, le volume $\boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_0(K_v))$ vaut

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^4} \frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{(\max\{1,|x_1|\}\max\{1,|x_2|\}\max\{1,|y_1|\}\max\{1,|y_2|\})^2} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^2} \frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1}{(\max\{1,|x_1|\}\max\{1,|y_1|\})^4}$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_0(K_v)) = 128 + 8\pi^2.$$

Et dans le cas complexe, ce volume vaut

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{C}^4} \frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{(\max\{1,|x_1|\}\max\{1,|x_2|\}\max\{1,|y_1|\}\max\{1,|y_2|\})^4}$$

soit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{H_{\mathcal{L},K},v}(V_0(K_v)) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbf{C}} \frac{\mathrm{d}x_1}{\max\{1,|x_1|\}^4}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2}(4\pi)^4 \\ &= 128\pi^4.\end{aligned}$$

$\square$

## 3.3 Phénomènes d'accumulation

Dans cette partie, nous donnons les premiers résultats relatifs à la conjecture 3.8. Nous montrerons tout d'abord que cette conjecture dans sa version forte est, sous certaines conditions, incompatible avec la conjecture 1.24 forte sur la surface de Fano $X$. Nous verrons ensuite que les points du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m X$ provenant d'un $m$-uplet de points de $X$ situés sur une droite rationnelle de $X$ forment en général un fermé strict de $\mathrm{Hilb}^m X$ qui est *a priori* fortement accumulateur, au sens de 1.26, c'est-à-dire qui contient plus de points rationnels que ce la conjecture 3.8 prédit.

### 3.3.1 Incompatibilités avec la conjecture 1.24 forte

Parmi les points rationnels de $\mathrm{Hilb}^m X_K$ se trouvent les points de l'ensemble

$$Z_0 = \varepsilon^{-1}(\pi(X^m(K)))$$

qui proviennent des points rationnels de $X_K^m$. C'est un ensemble mince de $\mathrm{Hilb}^m X_K$ qui est dense pour la topologie de Zariski, si $X(K)$ est dense dans $X$. Or, puisque le rang du groupe de Picard de $X_K^m$ est en général plus grand que celui de $\mathrm{Hilb}^m X_K$, si la conjecture forte est vraie sur $X_K^m$, cet ensemble devrait être accumulateur au sens de la définition 1.26. Ces ensembles fournissent donc de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Batyrev-Manin (conjecture 1.24 forte). Plus précisément, nous allons montrer ceci.

**Proposition 3.14.** *Soit $X$ une surface de Fano définie sur $K$, munie d'une hauteur adélique $H_{\omega^{-1},K}$ relative au fibré anticanonique $\omega_X^{-1}$. Supposons que*

1. *$X$ vérifie la conjecture 1.24 forte pour cette hauteur, sur un ensemble ouvert non vide $W$ de $X$ et sur le corps de nombres $K$ ;*
2. *pour tout fermé strict $F$ de $W^m$,*

$$\frac{\#\{x \in F(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x) \leqslant B\}}{\#\{x \in W^m(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x) \leqslant B\}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Notons $Z_W = \varepsilon^{-1}\Big(\pi(W^m(K))\Big) \cap U_0(K)$ et $t$ le rang du groupe de Picard de $X$.*

*Alors il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout ensemble ouvert non vide $U$ de $\operatorname{Hilb}^m X$,*

$$\#\{z \in Z_W \cap U \mid H_{\omega^{-1}_{\operatorname{Hilb}^m X},K}(z) \leqslant B\} \underset{B \to +\infty}{\sim} cB(\log B)^{tm-1}.$$

*De plus,*

$$c = \frac{1}{m!} c_{H_{\omega^{-1}_{X^m},K}}(X^m).$$

Rappelons que le rang du groupe de Picard de $\operatorname{Hilb}^m X$, pour $m \geqslant 2$, est égal à $t+1$. Cette proposition implique donc directement le résultat suivant.

**Corollaire 3.15.** *Sous les hypothèses de la proposition 3.14, la conjecture 3.8 forte est fausse si $m \geqslant 3$ ou ($m = 2$ et $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} X \geqslant 2$).*

Par exemple, les variétés toriques de Fano vérifient les hypothèses de la proposition 3.14 (voir [9, 3.10]), donc leurs schémas de Hilbert ponctuels fournissent toute une famille de nouveaux contre-exemples à la conjecture de Batyrev-Manin. En particulier, nous en déduisons que la conjecture 3.8 forte est fausse sur $\operatorname{Hilb}^m(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ pour tout entier $m \geqslant 2$. Au chapitre 4 nous montrerons que la variété $\operatorname{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, en plus d'être un contre-exemple à la conjecture forte, vérifie la conjecture affaiblie 3.8 sur le complémentaire d'un ensemble mince et dense contenant $Z_0$.

Jusqu'à présent, seul le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel [4], ainsi que quelques contre-exemples heuristique basés sur des évaluations numériques [14],étaient connus. Ceux-ci n'exhibaient cependant pas l'ensemble à écarter pour retrouver l'estimation de la conjecture de Batyrev-Manin.

La variété $X = \mathbf{P}^2$ vérifie également les hypothèses de la proposition, 3.14, donc nous pouvons dire que la conjecture de Batyrev-Manin est fausse sur $\operatorname{Hilb}^m \mathbf{P}^2$ pour tout entier $m \geqslant 3$. Lorsque $m = 2$ la contribution de l'ensemble $Z_0$ est du même ordre de grandeur que ce que prédit la conjecture. Nous verrons cependant plus loin qu'il est nécessaire de l'écarter pour que la conjecture 3.8, avec la constante de Peyre, soit vérifiée.

*Démonstration.* Par hypothèse, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$\#\{x \in W(K) \mid H_{\omega_X^{-1},K}(x) \leqslant B\} \underset{B \to +\infty}{\sim} c_1 B(\log B)^{t-1}.$$

D'après la compatibilité au produit de la conjecture de Batyrev-Manin [31, Proposition 4.1], il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\#\{x' \in W^m(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x') \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} c_2 B(\log B)^{tm-1}.$$

Or, la contribution de tout fermé strict de $W^m$ est négligeable. Ainsi, pour tout ensemble ouvert $U$ non vide de $\mathrm{Hilb}^m X$, en notant $W' = \pi^{-1}(\varepsilon(U \cap U_0))$,

$$\begin{aligned}
&\#\{z \in Z_W \cap U \mid H_{\omega^{-1},K}(z) \leqslant B\} \\
&\qquad = \frac{1}{m!}\#\{x' \in (W^m \cap W')(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x') \leqslant B\} \\
&\qquad \sim \frac{1}{m!}\#\{x' \in W^m(K) \mid H_{\omega_{X^m}^{-1},K}(x') \leqslant B\} \\
&\qquad \sim \frac{c_2}{m!} B(\log B)^{tm-1}.
\end{aligned}$$

□

### 3.3.2 Ensembles accumulateurs issus des courbes

Nous nous intéressons maintenant aux points rationnels d'un $\mathrm{Sym}^m \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une courbe de $X$ définie sur $K$. Nous cherchons à savoir si ceux-ci peuvent fournir des exemples de sous-ensembles *a priori* accumulateurs, c'est-à-dire dont le cardinal est asymptotiquement strictement supérieur à ce que prédit la conjecture 3.8. L'étude des points rationnels de $\mathrm{Sym}^m \mathcal{C}$ ayant été faite au chapitre 2, il nous suffit de considérer, sur $\mathcal{C}$, le fibré en droites

$$\mathcal{M} = \omega_X^{-1}{}_{|\mathcal{C}}$$

de degré

$$a = [\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} > 0.$$

#### Courbes rationnelles

Nous déduisons du théorème 2.13 la proposition suivante.

**Proposition 3.16.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de la surface de Fano $X$, rationnelle, géométriquement irréductible et définie sur $K$ et soit $m \geqslant 2$ en entier.*

1. *Si $\mathcal{C}(K) \neq \varnothing$, l'ensemble $\mathrm{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ est a priori fortement accumulateur dans l'ensemble des points rationnels de $\mathrm{Sym}^m X$ de*

*hauteur inférieure à $B$ si, et seulement si,* $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \leqslant m$.

2. *Si $\mathcal{C}$ a un point de degré $k \leqslant m$ sur $K$ et si $k(m+1) \leqslant [\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C}$, alors l'ensemble* $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ *n'est a priori pas accumulateur dans l'ensemble des points rationnels de* $\operatorname{Sym}^m X$ *de hauteur inférieure à $B$.*

Par exemple, lorsque $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, une courbe rationnelle $\mathcal{C}$ de bidegré $(d_1, d_2)$, avec $d_1, d_2 \geqslant 0$ et $(d_1, d_2) \neq (0,0)$, vérifie

$$[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} = 2d_1 + 2d_2.$$

Lorsque $m = 2$, les courbes de bidegré $(1,0)$ ou $(0,1)$ induisent donc un sous-ensemble *a priori* fortement accumulateur. Nous retrouverons ceci dans l'étude des points quadratiques de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (voir partie 4.2 concernant le *points irréductibles de type 1*).

Si $X$ est le plan projectif $\mathbf{P}^2$, une courbe rationnelle $\mathcal{C}$ sur $X$, définie sur $K$ et de degré $d > 0$,

$$[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} = 3d.$$

Si $\mathcal{C}$ a un point rationnel et si $3d \leqslant m$, la courbe $\mathcal{C}$ induit un sous-ensemble *a priori* fortement accumulateur dans $\operatorname{Sym}^m \mathbf{P}^2$. Si $m = 2$, la condition $3d \leqslant m$ n'est jamais vérifiée. En revanche, si $m \geqslant 3$, toute droite – de degré 1 – induit un sous-ensemble *a priori* fortement accumulateur. C'est d'ailleurs de ces sous-ensembles que provient la borne inférieure pour les points de degré $m \geqslant 3$ sur $\mathbf{P}^2$ dans [35] et [19]. Lorsque $m = 2$ que que $\mathcal{C}$ n'a pas de point rationnel mais a un point quadratique, elle est de degré anticanonique au moins 6 et donc la condition

$$2(m+1) \leqslant [\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C}$$

est vérifiée. Ainsi, aucune courbe rationnelle géométriquement irréductible de $\mathbf{P}^2$ n'induit d'ensemble accumulateur dans $\operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2$

Pour compléter cette étude, il convient de déterminer si la réunion des sous-ensembles $\operatorname{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ qui sont *a priori* accumulateurs peut contredire ou non la conjecture forte sur le schéma de Hilbert. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas.

**Proposition 3.17.** *Soient $m \geqslant 2$ et $a \geqslant 1$ deux entiers. La réunion $\mathcal{Y}_a$ des* $\operatorname{Hilb}^m \mathcal{C}$*, où $\mathcal{C}$ est une courbe rationnelle définie sur $K$ de la surface* *de Fano $X$ et de degré anticanonique $a$, est contenue dans un fermé de dimension inférieure ou égale à $m+a-1$.*

**Remarque 3.18.** Par conséquent, lorsque $a \leqslant m$, la réunion $\mathcal{Y}_a$ est un ensemble *a priori* accumulateur de $\operatorname{Hilb}^m X$ mais de dimension strictement inférieure à $2m$, donc ne contredit pas la conjecture forte.

*Démonstration.* Notons $\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a)$ l'ensemble des morphismes de $\mathbf{P}^1$ dans $X$ de degré $a$ par rapport au diviseur anticanonique de $X$. Une courbe rationnelle de degré anticanonique est alors un élément de $\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a)/\mathrm{PGL}_2$. La variété $X$ étant de Fano, on peut écrire

$$\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i,$$

où $\mathcal{M}_i$ sont les composantes de $\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a)$, $r \geqslant 1$. Si $\mathcal{M}$ est l'une des ces composantes, nous noterons $\operatorname{ev}_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \times \mathbf{P}^1 \to X$ le morphisme d'évaluation donné par $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$. Si celui-ci est dominant, alors

$$\dim \mathcal{M} = a + \dim X = a + 2. \tag{3.6}$$

Soit alors

$$F = \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ \operatorname{ev}_{\mathcal{M}_i} \text{ non dominant}}} \overline{\operatorname{ev}_{\mathcal{M}_i}(\mathcal{M}_i \times \mathbf{P}^1)}.$$

Cet ensemble est un fermé strict de $X$. Nous pouvons définir

$$H_a = (\operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, X, a) - \operatorname{Hom}(\mathbf{P}^1, F))/\mathrm{PGL}_2$$

et

$$W_a = \{(x, \mathcal{C}) \in \operatorname{Sym}^m X \times H_a \mid x \in \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}\}.$$

Si $H_a$ est vide, alors $\mathcal{Y}_a$ est inclus dans $\operatorname{Hilb}^m F$, donc de dimension inférieure à $m$. Sinon, d'après (3.6), $H_a$ est de dimension $a+2-3$ soit $a-1$. Les deux projections $p_1$ et $p_2$ envoient $W_a$ sur

$$V_a = \bigcup_{\mathcal{C} \in H_a} \operatorname{Sym}^m \mathcal{C}$$

et sur $H_a$, respectivement. Les fibres de $p_2$ étant de dimension $m$, nous en déduisons que la dimension de $W_a$ est égale à $a-1+m$. Par ailleurs, puisque la projection $p_1$ est surjective,

$$\dim V_a \leqslant \dim W_a.$$

Enfin, comme $\mathrm{Sym}^m F$ est un fermé strict de $\mathrm{Sym}^m X$, la dimension de $\mathcal{Y}_a$ est égale à celle de $V_a$. Par conséquent,

$$\dim \mathcal{Y}_a \leqslant a + m - 1.$$

$\square$

Si $\mathcal{C}$ n'est pas géométriquement irréductible et que $m = 2$, la proposition 2.22 donne le résultat suivant.

**Proposition 3.19.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie sur $K$ de la surface de Fano $X$, rationnelle, irréductible sur $K$, mais non géométriquement irréductible. Si $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \geqslant 3$, alors l'ensemble* $\mathrm{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ *n'est a priori pas accumulateur dans l'ensemble des points rationnels de* $\mathrm{Sym}^m X$ *de hauteur inférieure à $B$.*

Par exemple, si $X = \mathbf{P}^2$, $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} = 3 \deg \mathcal{C}$ est toujours au moins égal à 3. Donc $\mathrm{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ n'est *a priori* pas accumulateur.

### Courbes de genre supérieur

Pour les courbes de genre supérieur, commençons par interpréter les théorèmes de Silverman (théorème 2.18) et de Batyrev et Tschinkel (corollaire 2.21) du chapitre 2.

Dans tous les cas d'application du théorème 2.18, les ensembles

$$\mathrm{Sym}^m \mathcal{C}(K) - Y(K)$$

ne seront *a priori* pas accumulateurs dans $\mathrm{Sym}^m X$. Il reste la contribution du fermé $Y$ à vérifier.

Le corollaire 2.21 nous donne le résultat suivant.

**Proposition 3.20.** *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de genre $g \geqslant 2$ d'une surface projective lisse de Fano $X$ définie sur $K$ et soit $m > 2g - 2$ un entier. L'ensemble* $\mathrm{Sym}^m \mathcal{C}(K)$ *est a priori fortement accumulateur dans l'ensemble des points rationnels de* $\mathrm{Sym}^m X$ *de hauteur inférieure à $B$ si, et seulement si, $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \leqslant m - g$.*

Dans le cas $m = 2$, il nous suffit de traduire les majorations des propositions 2.22 et 2.23. en considérant le fibré en droites $\mathcal{M} = \omega_X^{-1}{}_{|\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$.

**Proposition 3.21.** *Soit $\mathcal{C}$ est une courbe définie sur $K$ d'une surface de Fano $X$, de genre $g \geqslant 1$,irréductible sur $K$. L'ensemble* $\operatorname{Sym}^2 \mathcal{C}(K)$ *n'est pas accumulateur dans* $\operatorname{Sym}^2 X(K)$ *pour le fibré $\omega_X^{-1}$ dans les cas suivants :*

1. *La courbe $\mathcal{C}$ n'est pas géométriquement irréductible ;*
2. *La courbe $\mathcal{C}$ n'est pas hyperelliptique ;*
3. *La courbe $\mathcal{C}$ est hyperelliptique et $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \geqslant 3$ ;*
4. *La courbe $\mathcal{C}$ est de genre 1, sa normalisée est une courbe elliptique sur $K$ et $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \geqslant 3$ ;*
5. *La courbe $\mathcal{C}$ est de genre 1 et $[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \geqslant 5$.*

En prenant toujours l'exemple de $X = \mathbf{P}^2$, la condition

$$[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \geqslant 3$$

est toujours vérifiée et si $\mathcal{C}$ est une courbe de $\mathbf{P}^2$ de genre 1, $\deg C \geqslant 3$, donc

$$[\omega_X^{-1}] \cdot \mathcal{C} \geqslant 9.$$

Ainsi, les ensembles $\operatorname{Sym}^2 \mathcal{C}(K)$ ne sont*a priori* jamais accumulateurs dans $\operatorname{Sym}^2 \mathbf{P}^2(K)$.

# CHAPITRE 4

# EXEMPLES DES SURFACES $\mathbf{P}^2$ ET $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

Dans ce chapitre, nous montrons la conjecture 3.8 lorsque la surface $X$ est $\mathbf{P}^2$ puis $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ sur $\mathbf{Q}$.

## 4.1 Cas de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ sur $\mathbf{Q}$

### 4.1.1 Points quadratiques sur $\mathbf{P}^2$

Les points quadratiques de $\mathbf{P}^2$ de hauteur bornée ont été étudiés par Schmidt [36]. Nous rappelons ici le résultat de cet article.

**Théorème 4.1** ([36], Théorème 3)**.** *Le nombre de points quadratiques $x \in \mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ vérifiant $H_2(x) \leqslant B$ est égal à*

$$\frac{96 + 8\pi^2}{\zeta(3)^2} B^6 \log B + O(B^6 \sqrt{\log B}).$$

De ce théorème nous allons déduire que la variété $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$ vérifie la conjecture 3.8 sur le corps $\mathbf{Q}$, pour une certaine hauteur anticanonique.

### 4.1.2 Points rationnels de $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$

Sur $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ nous choisirons la hauteur absolue anticanonique donnée par

$$H_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(3)} = H_2^3,$$

où $H_2$ est la hauteur absolue usuelle sur $\mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$. Nous en déduisons des hauteurs $H_{\mathcal{L}_{\mathbf{P}^2,2},\mathbf{Q}}$ et $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}$ sur $\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ et $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$, respectivement.

Dans la section 3.3.1, nous avons déjà étudié la répartition des points de

$$Z_0 = \varepsilon^{-1}\pi(\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})).$$

Le théorème suivant rappelle ce résultat et le complète par la contribution des points de sont complémentaire.

**Théorème 4.2.** *La variété* $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$ *vérifie la conjecture 3.8 sur le corps* $\mathbf{Q}$ *pour la hauteur* $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}$. *Plus précisément, pour tout ensemble ouvert non vide* $U$ *de* $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2$, *on a*

$$\#\{z \in (Z_0 - E(\mathbf{Q})) \cap U(\mathbf{Q}) \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\zeta(3)^2} B \log B$$

*et par ailleurs, on a*

$$\#\{z \in \mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) - Z_0 \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{24+2\pi^2}{3\zeta(3)^2} B \log B.$$

**Remarque 4.3.** Nous retrouvons, dans le deuxième équivalent, la constante de Peyre donnée en (3.4) :

$$C_{H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}}(\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2) = \frac{24+2\pi^2}{3\zeta(3)^2}.$$

Ce théorème montre donc que la conjecture 3.8 est vraie en enlevant l'ensemble exceptionnel $Z_0$ qui est mince et dense. Cependant, puisque la contribution de $Z_0 - E(\mathbf{Q})$ est du même ordre de grandeur, la conjecture 3.8 forte est également vraie si l'on enlève la condition sur la constante (conjecture de Peyre). Nous ne sommes néanmoins pas en mesure de montrer dans ce texte que la conjecture de Peyre est fausse. Pour cela il faudrait montrer que pour tout ensemble ouvert non vide $U$ de $\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$,

$$\#\{z \in (\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2 - E)(\mathbf{Q}) \cap U(\mathbf{Q}) \mid H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} \underset{B\to+\infty}{\sim} \tilde{c} B \log B$$

avec $\tilde{c} > \frac{24+2\pi^2}{3\zeta(3)^2}$. Au paragraphe 3.3.2, nous avons montré que les fermés de $\mathrm{Sym}^2\,\mathbf{P}^2$ de la forme $\mathrm{Sym}^2\,C$ où $C$ est une courbe de $\mathbf{P}^2$ ne sont pas accumulateurs. Il faudrait poursuivre ce travail pour les autres fermés de

$\mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^2$.

*Démonstration.* La première partie est exactement la proposition 3.14, en remarquant que la constante de Peyre pour $(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2$ avec la hauteur

$$H_{\omega^{-1}_{\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2},\mathbf{Q}} \colon (x_1, x_2) \mapsto H_2(x_1)^3 H_2(x_2)^3$$

considérée est

$$\left(\frac{4}{\zeta(3)}\right)^2 = \frac{16}{\zeta(3)^2}.$$

Puisque nous avons un isomorphisme

$$\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2 - E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^2 - D,$$

il suffit, pour montrer la seconde partie, d'étudier les points rationnels de $\mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^2 - D$ de hauteur $H_{\mathcal{L},\mathbf{Q}}$ bornée. Notons

$$V_r = \pi(\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}))$$

l'ensemble des points réductibles de $\mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$. Nous avons alors, en notant $\bar{x} \in \mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}})$ le conjugué du point quadratique $x$,

$$\begin{aligned}
&\#\{y \in \mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) - V_r(\mathbf{Q}) \mid H_{\mathcal{L}_{\mathbf{P}^2,2},\mathbf{Q}}(y) \leqslant B\} \\
&\quad = \frac{1}{2}\#\{(x,\bar{x}) \in (\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2)(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = 2,\ H_2(x)^6 \leqslant B\} \\
&\quad = \frac{1}{2}\#\{x \in \mathbf{P}^2(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = 2,\ H_2(x) \leqslant B^{1/6}\} \\
&\quad \sim \frac{24 + 2\pi^2}{3\zeta(3)^2} B \log B,
\end{aligned}$$

d'après le théorème 4.1. □

## 4.2 Cas de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ sur $\mathbf{Q}$

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où la surface $X$ est $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Nous allons montrer que la conjecture 3.8 est vraie pour $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, mais fausse dans se version forte.

### 4.2.1 Théorème principal

On considère la surface $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ définie sur le corps $\mathbf{Q}$ et munie de la hauteur anticanonique donnée par

$$H_{\mathcal{O}(2,2)}(x, y) = H_1(x)^2 H_1(y)^2,$$

où $H_1$ est la hauteur absolue usuelle sur $\mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$. Nous nous intéressons ici, en particulier, aux points quadratiques sur $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, donc à la conjecture 3.8 sur $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ pour la hauteur induite $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)}, \mathbf{Q}}$. Nous avons, pour tout $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2(\mathbf{Q})$,

$$H_{\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, 2}, \mathbf{Q}}(\pi((x_1, x_2), (y_1, y_2))) = H(x_1)^2 H(x_2)^2 H(y_1)^2 H(y_2)^2$$

et

$$H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)}, \mathbf{Q}} = H_{\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1, 2}, \mathbf{Q}} \circ \varepsilon.$$

Pour plus de clarté dans les énoncés et les démonstrations, nous noterons ici

$$\omega^{-1} = \omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)}$$

et

$$H = H_1$$

Rappelons que nous avons défini les ensembles

$$U_0 = \mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) - E$$

et

$$V_0 = \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) - D.$$

Le morphisme $\varepsilon$ induit un isomorphisme de $U_0$ sur $V_0$.

Nous allons séparer les points rationnels de $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ en trois catégories que nous décrivons ici sur $(\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1))(\mathbf{Q})$. Nous considérerons

1. l'ensemble $V_r(\mathbf{Q}) = \pi((\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2(\mathbf{Q}))$ des points *réductibles* ;
2. l'ensemble $V_1(\mathbf{Q}) \subset V_0(\mathbf{Q})$ des points dits *irréductibles de type 1* de la forme $x + \bar{x}$ avec $x = (x_1, x_2)$ où $x_1 \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$, $[\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2$, et $x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ (ou, de manière symétrique, $x_2 \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$, avec $[\mathbf{Q}(x_2) : \mathbf{Q}] = 2$, et $x_1 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$) et $\bar{x}$ est son conjugué ;
3. et l'ensemble $V_2(\mathbf{Q}) \subset V_0(\mathbf{Q})$ des points dits *irréductibles de type 2* de la forme $x + \bar{x}$ où $x = (x_1, x_2)$, avec $x_1, x_2 \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}})$ et $[\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(x_2) : \mathbf{Q}] = 2$, et $\bar{x}$ est son conjugué.

Nous noterons $Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}$ la fonction zêta des hauteurs pour $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ muni de la hauteur absolue usuelle $H$. Cette fonction est définie, pour $\mathrm{Re}(s) > 2$, par

$$Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(s) = \sum_{x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})} \frac{1}{H(x)^s}.$$

Nous allons montrer le résultat suivant.

**Théorème 4.4.** *Soient* $Z_0 = \varepsilon^{-1}(V_r(\mathbf{Q}))$, $Z_1 = \varepsilon^{-1}(V_1(\mathbf{Q}))$ *et*

$$Z = Z_0 \cup Z_1.$$

*Nous avons*

1. *Pour tout ensemble ouvert non vide $U$ de* $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$, *le cardinal de l'ensemble*

$$\{z \in U(\mathbf{Q}) \cap (Z_0 - E(\mathbf{Q})) \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\}$$

*est équivalent, lorsque $B$ tend vers $+\infty$, à*

$$\frac{8}{\zeta(2)^4} B \log^3 B.$$

2. *Lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$\#\{z \in Z_1 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} = \frac{8 Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)} B^{3/2} + O(B \log B).$$

3. *Lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$\#\{z \in \mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}) - Z \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} = c_3 B \log^2 B + O(B \log^{3/2} B),$$

*avec*

$$c_3 = \frac{1}{4}(16+\pi^2) \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right).$$

**Remarque 4.5.** 1. La troisième partie du théorème montre que la conjecture 3.8 est vraie pour $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ avec pour ensemble exceptionnel l'ensemble $Z$, mince et dense. De plus, d'après la proposition 3.13, la constante $c_3$ est exactement la constante de Peyre pour la variété $\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$ munie de la hauteur $H_{\omega^{-1}_{\mathrm{Hilb}^2(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1),\mathbf{Q}}}$.

2. Comme nous l'avons déjà remarqué au paragraphe 3.3.1, la première partie fournit un contre-exemple à puissance du $\log B$ dans la conjecture 3.8 forte (conjecture de Batyrev-Manin). Ce théorème constitue le premier exemple où la conjecture forte est fausse mais où l'on peut prouver une conjecture affaiblie.

3. Si on considère le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1\colon & (\mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^1) \times \mathbf{P}^1 & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \\ & (\pi(x,y),z) & \longmapsto & \pi((x,z),(y,z)) \end{array}$$

et son symétrique $\varphi_2\colon (\pi(x,y),z) \mapsto \pi((z,x),(z,y))$, alors

$$V_1(\mathbf{Q}) = \Big(\varphi_1(\mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})) \cup \varphi_2(\mathrm{Sym}^2 \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}))\Big) \cap V_0(\mathbf{Q}).$$

Ainsi, $V_1(\mathbf{Q})$ est un ensemble mince de $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\mathbf{Q})$ contenu dans un fermé de dimension 3 de $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$. La deuxième partie ne donne donc pas de contre-exemple à la puissance de $B$ dans la conjecture forte.

4. Si l'on revient à notre problème initial, l'étude de la répartition des points quadratiques de $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_{\mathbf{Q}}$, ce théorème montre que, lorsque $B$ tend vers l'infini, le cardinal de l'ensemble

$$\{x = (x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = 2,\ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}$$

est égal à

$$c_2 B^6 + O(B^4 \log^2 B),$$

le terme principal étant donné par la contribution des points quadratiques de la forme $(x_1, x_2)$, où l'un des $x_i$ est rationnel.

La fin de ce chapitre se concentre sur la preuve du théorème 4.4. La première partie a déjà été traitée dans la proposition 3.14. En effet, la variété $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2$ est une variété de drapeaux, donc ses points rationnels sont équidistribués sur tout ensemble ouvert non vide (condition 2 de la proposition 3.14). De plus, d'après le théorème de Schanuel sur $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ et la stabilité de la constante de Peyre par produit, la constante associée à $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)^2$ est

$$\left(\frac{2}{\zeta(2)}\right)^4.$$

De la même manière que pour $\mathrm{Hilb}^2 \mathbf{P}^2$, le reste du théorème sera déduit de l'étude des points quadratiques de la surface $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Nous étudions donc maintenant la répartition des points quadratiques de type 1, puis de type 2.

### 4.2.2 Points quadratiques de type 1

Intéressons-nous aux points quadratiques de type 1, de la forme $x = (x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\bar{\mathbf{Q}})$ où l'un des $x_i$ est rationnel et l'autre de degré 2. Notons

$$\mathcal{N}_1(B) = \#\{(x_1, x_2) \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \mid [\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2,\ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}.$$

**Théorème 4.6.** *Lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$\mathcal{N}_1(B) = \frac{8 Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)} B^6 + O(B^4 \log B).$$

Ce théorème suivant démontre le point 2. du théorème 4.4, étant donné la relation

$$\#\{z \in Z_1 \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z) \leqslant B\} = \frac{1}{2}\mathcal{N}_1(B^{1/4}).$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\mathcal{N}_1(B) = \sum_{x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})} \#\left\{x_1 \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2,\ H(x_1) \leqslant \frac{B}{H(x_2)}\right\}.$$

Or, d'après [36, Théorème 3] ,

$$\#\{x_1 \in \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{Q}}) \mid [\mathbf{Q}(x_1) : \mathbf{Q}] = 2],\ H(x_1) \leqslant B\} = \frac{8}{\zeta(3)} B^6 + O(B^4 \log B).$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}_1(B) = \sum_{x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})} \left( \frac{8}{\zeta(3)} \frac{B^6}{H(x_2)^6} + O\left( \frac{B^4}{H(x_2)^4} \log \left( \frac{B}{H(x_2)} \right) \right) \right).$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})} \frac{\log H(x_2)}{H(x_2)^4} &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \log(n) \frac{\#\{x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \mid n \leqslant H(x_2) < n+1\}}{n^4} \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}, \end{aligned}$$

car

$$\#\{x_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}) \mid H(x_2) \leqslant B\} = \frac{2}{\zeta(2)} B^2 + O(B \log B). \tag{4.1}$$

d'après le théorème de Schanuel [34]. Donc la série du terme d'erreur converge et

$$\mathcal{N}_1(B) = \frac{8 Z_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}),H}(6)}{\zeta(3)} B^{3/2} + O(B \log B).$$

□

### 4.2.3 Points quadratiques de type 2

Notons $\mathcal{N}_2(B)$ l'ensemble des points quadratiques de type 2 de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, de la forme $x = (x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(\bar{\mathbf{Q}})$ avec $x_1$ et $x_2$ des points quadratiques de $\mathbf{P}^1$, et vérifiant

$$H(x_1)H(x_2) \leqslant B.$$

Le point $x$ est de degré 2 si, et seulement si, les points $x_1$ et $x_2$ engendrent un même corps quadratique $L$. Nous avons donc

$$\mathcal{N}_2(B) = \sum_{[L:\mathbf{Q}]=2} \#\{(x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1)^2(L),\ \mathbf{Q}(x_i) = L,\ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}.$$

**Théorème 4.7.** *Lorsque $B$ tend vers l'infini, $\mathcal{N}_2(B)$ est égal à*

$$(64+4\pi^2)\prod_p\left(1-\frac{7}{p^3}+\frac{7}{p^4}-\frac{1}{p^7}\right)B^4(\log B)^2+O(B^4(\log B)^{3/2}).$$

Ceci démontre le point 3. du théorème 4.4, étant donné que

$$\#\{z\in \mathrm{Hilb}^2\,\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})-Z \mid H_{\omega^{-1},\mathbf{Q}}(z)\leqslant B\}=\frac{1}{2}\mathcal{N}_2(B^{1/4}).$$

Pour la preuve de du théorème 4.7, nous utiliserons une méthode semblable à celle utilisée par Schmidt dans [36]. Commençons par étudier, pour tout corps quadratique $L$ et tout nombre réel $B$, le cardinal

$$\mathcal{N}_{2,L}(B)=\#\{(x_1,x_2)\in(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)(L)\mid \mathbf{Q}(x_i)=L,\ H(x_1)H(x_2)\leqslant B\}.$$

**Remarque 4.8.** Dans la suite, les constantes implicites dans les notations $O$, $\ll$ ou $\gg$ seront indépendantes du corps quadratique $L$. Pour tout nombre réel $u>0$, nous notons

$$\log^+(u)=\max\{1,\log u\}.$$

Soient

$$c_L=\frac{\gamma_L\lambda_L h_L R_L}{w_L\zeta_L(2)\,|\Delta_L|},\qquad c_L^*=\sqrt{\frac{h_L R_L\log^+(h_L R_L)}{|\Delta_L|}},$$

avec

$$\gamma_L=\begin{cases}2\pi & \text{si } \Delta_L<0\\ 8 & \text{si } \Delta_L>0\end{cases}\qquad \lambda_L=\begin{cases}2\pi & \text{si } \Delta_L<0\\ 4 & \text{si } \Delta_L>0\end{cases},$$

et

$$\delta_L=\max\left\{1,\frac{|\Delta_L|^{1/4}}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Rappelons le résultat suivant, dû à Schmidt, qui donne une version plus précise du théorème de Schanuel.

**Proposition 4.9** ([36], théorème 2)**.** *Soit $L$ un corps quadratique. Alors, lorsque $B$ tend vers l'infini,*

$$\#\{\alpha\in\mathbf{P}^1(L)\mid \mathbf{Q}(\alpha)=L,\ H(\alpha)\leqslant B\}=c_LB^4+O(c_L^*B^3).$$

**Remarque 4.10.** 1. Si $\alpha \in \mathbf{P}^1(L)$ et $\mathbf{Q}(\alpha) = L$ est quadratique, alors le discriminant de $L$ vérifie

$$|\Delta_L| \leqslant 4H(y)^4. \tag{4.2}$$

(borne de Silverman, voir [38, théorème 2]).

2. Nous en déduisons que le cardinal de la proposition 4.9 est nul si $B < \delta_L$. Ainsi,

$$c_L \delta_L = O(c_L^*). \tag{4.3}$$

Nous pouvons alors montrer la proposition suivante.

**Proposition 4.11.** *Soit $L$ un corps quadratique. Le cardinal $\mathcal{N}_{2,L}(B)$ de l'ensemble*

$$\{(x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)(L) \mid \mathbf{Q}(x_i) = L,\ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}.$$

*vérifie*

1. *si $B < \delta_L^2$, $\mathcal{N}_{2,L}(B) = 0$ ;*

2. *pour tout réel $B \geqslant \delta_L^2$, $\mathcal{N}_{2,L}(B)$ est égal à*

$$4c_L^2 B^4 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + O\left(\frac{c_L^* c_L}{\delta_L} B^4 + (c_L^*)^2 B^3 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + (c_L^*)^2 B^3\right).$$

*Démonstration.* Tout d'abord, si $L$ est un corps quadratique et si $y$ est un point de $\mathbf{P}^1(L)$ tel que $\mathbf{Q}(y) = L$ alors nous avons, d'après (4.2),

$$|\Delta_L| \leqslant 4H(y)^4.$$

De plus, la hauteur $H$ est à valeurs dans $[1; +\infty[$. Ainsi,

$$H(y) \geqslant \delta_L.$$

Nous en déduisons la première partie. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{2,L}(B) &= \#\{(x,y) \in (\mathbf{P}^1)^2(L) \mid \mathbf{Q}(x) = \mathbf{Q}(y) = L,\ H(x)H(y) \leqslant B\} \\ &= \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \#\left\{y \in \mathbf{P}^1(L) \mid \mathbf{Q}(y) = L,\ H(y) \leqslant \frac{B}{H(x)}\right\} \\ &= c_L B^4 \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^4} + O\left(c_L^* B^3 \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^3}\right).\end{aligned}$$

Notons, pour tout entier naturel $n$ et tous nombres réels $M \geqslant N \geqslant 1$,

$$Z_L(n, N, M) = \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ N \leqslant H(x) \leqslant M}} \frac{1}{H(x)^n}.$$

Nous allons montrer que

$$Z_L(4, \delta_L, B/\delta_l) = 4c_L \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + O\left(\frac{c_L^*}{\delta_L}\right)$$

et

$$Z_L(3, \delta_L, B/\delta_l) = O\left(\frac{c_L}{\delta_L} B + c_L^* \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + c_L^*\right),$$

ce qui démontrera la proposition. Posons, pour tout entier naturel $j \geqslant 1$,

$$a_L(j) = \#\{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x) = L,\ j - 1 \leqslant H(x) < j\}$$

et

$$A_L(j) = \sum_{k=1}^{j} a_L(k).$$

Alors, d'après la proposition 4.9,

$$A_L(j) = c_L j^4 + O(c_L^* j^3)$$

et, par ailleurs, pour $M > N \geqslant 1$ entiers naturels,

$$\begin{aligned} Z_L(n,N,M) &= \sum_{j=N+1}^{M} \sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ j-1 \leqslant H(x) < j}} \frac{1}{H(x)^n} \\ &= \sum_{j=N+1}^{M} \frac{a(j)}{j^n} + O\left( \sum_{j=N+1}^{M} \frac{a(j)}{j^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

De plus, par la formule sommatoire d'Abel, pour tous entiers naturels $n$ et $M > N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=N+1}^{M} \frac{a(j)}{j^n} &= \frac{A_L(M)}{M^n} - \frac{A_L(N)}{N^n} + n \int_N^M \frac{A_L(u)}{u^{n+1}} \mathrm{d}u \\ &= \frac{A_L(M)}{M^n} - \frac{A_L(N)}{N^n} + n \int_N^M \frac{c_L u^4 + O(c_L^* u^3)}{u^{n+1}} \mathrm{d}u \\ &= \frac{A_L(M)}{M^n} - \frac{A_L(N)}{N^n} + n c_L \int_N^M \frac{1}{u^{n-3}} \mathrm{d}u + O\left( c_L^* \int_N^M \frac{1}{u^{n-2}} \mathrm{d}u \right). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tous entiers $M > N \geqslant 1$,

$$Z_L(4,N,M) = 4 c_L \log\left(\frac{M}{N}\right) + O\left(c_L + \frac{c_L^*}{N}\right)$$

et

$$Z_L(3,N,M) = O\left(c_L M + c_L N + c_L^* + c_L^* \log\left(\frac{M}{N}\right)\right).$$

En prenant maintenant $M = \lfloor B/\delta_L \rfloor + 1$ et $N = \lfloor \delta_L \rfloor$, et d'après la relation (4.3) de la remarque 4.10, on en déduit que

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^4} = 4 c_L \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + O\left(\frac{c_L^*}{\delta_L}\right)$$

et

$$\sum_{\substack{x \in \mathbf{P}^1(L),\ \mathbf{Q}(x)=L \\ \delta_L \leqslant H(x) \leqslant \frac{B}{\delta_L}}} \frac{1}{H(x)^3} = O\left(\frac{c_L}{\delta_L} B + c_L^* + c_L^* \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right)\right).$$

□

Les termes de la somme

$$\sum_{[L:\mathbf{Q}]=2} \#\{(x_1, x_2) \in (\mathbf{P}^1)^2(L),\ \mathbf{Q}(x_i) = L,\ H(x_1)H(x_2) \leqslant B\}$$

sont nuls dès que $|\Delta_L|^2 > 16B^4$. On peut donc récrire

$$\mathcal{N}_2(B) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2\\ |\Delta_L|\leqslant 4B^2}} \mathcal{N}_{2,L}(B).$$

On obtient alors

$$\mathcal{N}_2(B) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2\\ |\Delta_L|\leqslant 4B^2}} \left[4c_L^2 B^4 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) + \right.$$
$$\left. +O\left(\frac{c_L^* c_L}{\delta_L} B^4 + (c_L^*)^2 B^3 + (c_L^*)^2 B^3 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right)\right)\right].$$

Il reste à sommer des constantes arithmétiques sur l'ensemble des corps quadratiques. Le calcul des sommes est détaillée au chapitre 5 et repose sur des méthodes dont l'esprit est différent du reste de cette thèse. Nous énonçons ici le résultat obtenu.

**Proposition 4.12.** *Soient $Y \geqslant 1$ et $B \geqslant 1$ des nombres réels.*

1. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2\\ |\Delta_L|\leqslant Y}} c_L^2 = 2(\pi^2+16)\prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right)\log(Y) + O(1).$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2\\ |\Delta_L|\leqslant Y}} c_L^2 \log(\delta_L^2) = \frac{1}{2}(\pi^2+16)\prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right)\log^2(Y)$ $+O(\log Y).$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2\\ |\Delta_L|\leqslant Y}} \frac{c_L^* c_L}{\delta_L} = O((\log Y)^{3/2}).$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2\\ |\Delta_L|\leqslant Y}} (c_L^*)^2 = O(Y^{1/2}\log Y).$
5. $\displaystyle\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2\\ |\Delta_L|\leqslant Y}} (c_L^*)^2 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right) = O\left(Y^{1/2}\log Y \log\left(\frac{B}{Y^{1/2}}\right) + Y^{1/2}\log Y\right).$

En prenant $Y = 4B^2$, cette proposition permet de montrer que

$$\sum_{\substack{[L:\mathbf{Q}]=2 \\ |\Delta_L| \leqslant 4B^2}} 4c_L^2 B^4 \log\left(\frac{B}{\delta_L^2}\right)$$

a pour terme principal

$$4B^4(\pi^2+16)\prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right)\left(2\log(B)\log(B^2) - \frac{1}{2}\log^2(B^2)\right),$$

soit

$$8(\pi^2+16)\prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right) B^4 \log^2(B),$$

avec pour terme d'erreur $O(B^4 \log B)$. Finalement,

$$\mathcal{N}_2(B) = 4(\pi^2+16)\prod_p \left(1 - \frac{7}{p^3} + \frac{7}{p^4} - \frac{1}{p^7}\right) B^4 \log^2 B + O(B^4(\log B)^{2/3}).$$

# CHAPITRE 5

# ESTIMATIONS DE SOMMES ARITHMÉTIQUES

L'objectif de ce chapitre est de démontrer la proposition 4.12 que nous avons laissée en suspens dans la preuve du théorème 4.4. Nous commencerons par évaluer une somme faisant intervenir des fonctions $L$ de Dirichlet. À partir de celle-ci, nous en déduirons les estimations qui nous intéressent.

## 5.1 Une somme de fonctions $L$

Les corps quadratiques sont paramétrés par leur discriminant, entier (relatif) $\Delta$ vérifiant

(a) $\Delta = 1 \pmod 4$ et $\Delta \neq 1$ est sans facteur carré

ou

(b) $\Delta = 4\Delta'$, $\Delta' = 2$ ou $3 \pmod 4$ et $\Delta'$ est sans facteur carré.

Nous noterons $\mathcal{D}$ l'ensemble des tels entiers $\Delta$ et , pour $Y$ un nombre réel strictement positif, $\mathcal{D}^+(Y)$ (respectivement $\mathcal{D}^-(Y)$) désignera l'ensemble des entiers $\Delta \in \mathcal{D}$ tels que $0 < \Delta \leqslant Y$ (respectivement $-Y \leqslant \Delta < 0$).

Nous considérons, pour $\Delta \in \mathcal{D}$, le caractère $\chi_\Delta \colon n \mapsto \left(\frac{\Delta}{n}\right)$, où $\left(\frac{\Delta}{n}\right)$ est le symbole de Kronecker défini par les conditions suivantes :

(i) Pour $p > 2$ premier, $\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ est le symbole de Legendre ;

(ii) $\left(\frac{\Delta}{n}\right) = 0$ si $n$ divise $\Delta$ ;

(iii) $\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta = 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{si } \Delta = 5 \pmod 8 \end{cases}$

(iv) $\left(\frac{\Delta}{-1}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta > 0 \\ -1 & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$

(v) $n \mapsto \left(\frac{\Delta}{n}\right)$ est totalement multiplicative.

Le caractère $\chi_\Delta$ est un caractère de Dirichlet primitif modulo $|\Delta|$ (voir [26, Théorème 9.13]).

On peut alors considérer la série $L$ de Dirichlet associée

$$L(s, \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{n}\right) n^{-s},$$

définie sous cette forme pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et se prolongeant en une fonction entière à $\mathbf{C}$.

On définit maintenent, pour $a, s \in \mathbf{C}$,

$$\mathcal{S}^{\pm}(s, a, Y) = \sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \frac{L(s, \Delta)^2}{L(a, \Delta)^2},$$

où $\mathcal{S}^{+}(s, a, Y)$ (respectivement $\mathcal{S}^{-}(s, a, Y)$) est la somme portant sur $\mathcal{D}^{+}(Y)$ (respectivement $\mathcal{D}^{-}(Y)$). Nous souhaitons montrer la proposition suivante, donnant une formule asymptotique de $\mathcal{S}^{\pm}(s, a, Y)$, lorsque $Y$ tend vers l'infini.

**Proposition 5.1.** *Soient $s = \sigma + i\tau$ et $a = \alpha + i\beta$ deux nombres complexes, avec $\sigma, \tau, \alpha, \beta$ des nombres réels tels que $7/8 < \sigma < \alpha$ et $\alpha > 3/2$. Alors, pour tout $\delta > 0$,*

$$\mathcal{S}^{\pm}(s, a, Y) = c(s, a)Y + O\left(Y^{\frac{1}{6}\max\{13-8\sigma, 9-4\sigma, 3\}+\delta}\right)$$

*avec*

$$c(s, a) = \frac{\zeta(2s)^2}{2} \prod_{\substack{p \\ premier}} \left( \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p^{2a}} + \frac{1}{p^{2(a+s)}} - \frac{4}{p^{a+s}} - \frac{1}{p^{4s}} + \frac{3}{p^{2s}}\right)\right).$$

*De plus, la constante implicite dans le $O$ ne dépend que de $\delta, \alpha$ et $\sigma$.*

En particulier, lorsque $s = 1$ et que $a = 2$, nous obtenons l'estimation suivante, que nous utiliserons dans la prochaine partie de ce chapitre.

**Corollaire 5.2.** *Pour tout $\delta > 0$,*

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \frac{L(1,\Delta)^2}{L(2,\Delta)^2} = c(1,2)Y + O\left(Y^{\frac{5}{6}+\delta}\right),$$

*avec*

$$c(1,2) = \frac{\zeta(2)^2}{2} \prod_p \left(1 - 7p^{-3} + 7p^{-4} - p^{-7}\right).$$

Démontrons maintenant la proposition 5.1. Dans toute la démonstration, les constantes implicites dans les $O$, ou les symboles $\ll$ et $\gg$, ne dépendront que de $\delta, \alpha$ et $\sigma$. La démonstration s'inspire du travail de Schmidt [36, Annexe] pour l'estimation de

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} \frac{L(1,\Delta)}{L(2,\Delta)}$$

et du travail de Jutila [23].

On se donne deux nombres complexes $s = \sigma + i\tau$ et $a = \alpha + i\beta$, avec $\sigma, \tau, \alpha, \beta$ des nombres réels. Nous introduisons également un paramètre $Z \geqslant 1$, qui sera choisi plus tard en fonction de $Y$.

**Lemme 5.3.** *Pour tout $Z \geqslant 1$, tout $\Delta \in \mathcal{D}$, tout $s = \sigma + i\tau$ et tout $\delta > 0$,*

$$\begin{aligned} L(s,\Delta)^2 = \sum_{n \leqslant Z^2} \frac{d(n,Z)}{n^s} \left(\frac{\Delta}{n}\right) + \\ + O\Big(Z^{-2\sigma} |\Delta|^{1+\delta} + Z^{-2\sigma+1} |\Delta|^{1/2+\delta} + Z^{-\sigma+\delta} |\Delta|^{1/2+\delta}\Big), \end{aligned}$$

*où $d(n,Z) = \#\{(n_1,n_2) \in \mathbf{N}^2 \mid n_1 \leqslant Z,\ n_2 \leqslant Z$ et $n_1 n_2 = n\}$.*

**Remarque 5.4.** Si $n \leqslant Z$, alors $d(n,Z) = d(n)$, le nombre de diviseurs positifs de $n$. Dans tous les cas, $d(n,Z) \leqslant d(n)$. De plus, la fonction $n \mapsto d(n)$ est multiplicative et vérifie, pour tout $n \geqslant 1$ et tout nombre réel $\delta > 0$,

$$d(n) \ll n^{\delta}$$

(voir [1, Théorème 13.12]).

*Démonstration.* Nous avons, d'après [36, Lemme 16, page 372],

$$L(s,\Delta) = \sum_{n\leqslant Z} \frac{1}{n^s}\left(\frac{\Delta}{n}\right) + O\Big(Z^{-\sigma}\left|\Delta\right|^{1/2+\delta}\Big).$$

Alors

$$\begin{aligned} L(s,\Delta)^2 = &\left(\sum_{n\leqslant Z} \frac{1}{n^s}\left(\frac{\Delta}{n}\right)\right)^2 \\ &+ O\left(Z^{-\sigma}\left|\Delta\right|^{1/2+\delta}\left|\sum_{n\leqslant Z} \frac{1}{n^s}\left(\frac{\Delta}{n}\right)\right| + Z^{-2\sigma}\left|\Delta\right|^{1+2\delta}\right) \end{aligned}$$

De plus,

$$\left(\sum_{n\leqslant Z} \frac{1}{n^s}\left(\frac{\Delta}{n}\right)\right)^2 = \sum_{n\leqslant Z^2} \frac{d(n,Z)}{n^s}\left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n\leqslant Z} \frac{1}{n^s}\left(\frac{\Delta}{n}\right)\right| &\ll \sum_{n\leqslant Z} \frac{1}{n^\sigma} \\ &\ll \begin{cases} \log Z & \text{si } \sigma \geqslant 1 \\ Z^{-\sigma+1} & \text{sinon} \end{cases} \\ &\ll Z^\delta + Z^{-\sigma+1}. \end{aligned}$$

□

Dans la suite, $\mu$ désignera la fonction de Möbius. Nous avons alors, pour tout $\Delta \in \mathcal{D}$ et tout $a = \alpha + i\beta$,

$$L(a,\Delta)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\left(\frac{\Delta}{m}\right) m^{-a}.$$

De plus, si $\alpha > 1$,

$$L(a,\Delta) \geqslant \zeta(\alpha)^{-1} \gg 1$$

(voir [36, Lemme 16]). Nous pouvons donc récrire la somme $\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y)$, pour $\alpha > 1$, sous la forme

$$\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y)=\sum_{n\leqslant Z^2}\sum_{m,\ell\geqslant 1}\frac{d(n,Z)}{n^s}\frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a}\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^{\pm}(Y)}\left(\frac{\Delta}{nm\ell}\right)+$$
$$+O\left(\sum_{|\Delta|\leqslant Y}\Big(Z^{-2\sigma}\left|\Delta\right|^{1+\delta}+Z^{-2\sigma+1}\left|\Delta\right|^{1/2+\delta}+Z^{-\sigma+\delta}\left|\Delta\right|^{1/2+\delta}\Big)\right)$$

et donc

$$\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y)=\sum_{n\leqslant Z^2}\sum_{m,\ell\geqslant 1}\frac{d(n,Z)}{n^s}\frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a}\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^{\pm}(Y)}\left(\frac{\Delta}{nm\ell}\right)+$$
$$+O\Big(Y^{2+\delta}Z^{-2\sigma}+Y^{3/2+\delta}Z^{-2\sigma+1}+Y^{3/2+\delta}Z^{-\sigma+\delta}\Big). \tag{5.1}$$

Nous allons maintenant séparer le terme principal en deux parties, selon que l'entier $nm\ell$ est un carré ou non. Nous noterons donc

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\boxtimes}(s,a,Y,Z)=\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell \text{ non carré}}}\frac{d(n,Z)}{n^s}\frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a}\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^{\pm}(Y)}\left(\frac{\Delta}{nm\ell}\right)$$

et

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\square}(s,a,Y,Z)=\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{d(n,Z)}{n^s}\frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a}\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^{\pm}(Y)}\left(\frac{\Delta}{u^2}\right).$$

Commençons par la contribution des $nm\ell$ non carrés.

**Lemme 5.5.** *Pour tout $s=\sigma+i\tau$, tout $a=\alpha+i\beta$ avec $\alpha>5/4$ et tout $\delta>0$,*

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\boxtimes}(s,a,Y,Z)\ll Y^{1/2}+Y^{1/2}Z^{-2\sigma+5/2+\delta}.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 15 de [36], pour tout entier $\ell\geqslant 1$ qui n'est pas un carré et pour tout $\delta>0$,

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^{\pm}(Y)}\left(\frac{\Delta}{\ell}\right)\ll \ell^{1/4+\delta}Y^{1/2}.$$

De plus, $d(n,Z)\ll n^{\delta}$ pour tout $\delta>0$. Ainsi nous obtenons

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\boxtimes}(s,a,Y,Z)\ll Y^{1/2}\cdot\sum_{n\leqslant Z^2}\frac{1}{n^{\sigma-1/4-2\delta}}\cdot\sum_{m,\ell\geqslant 1}\frac{1}{(m\ell)^{\alpha-1/4-\delta}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant Z^2}\frac{1}{n^{\sigma-1/4-2\delta}} &\ll \begin{cases}1 & \text{si } \sigma>5/4 \text{ et } \delta \text{ assez petit}\\ Z^{-2\sigma+5/2+\delta} & \text{si } \sigma\leqslant 5/4\end{cases}\\ &\ll 1+Z^{-2\sigma+5/2+\delta}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{m,\ell\geqslant 1}\frac{1}{(m\ell)^{\alpha-1/4-\delta}} &= \left(\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{(m)^{\alpha-1/4-\delta}}\right)^2\\ &\ll 1\end{aligned}$$

car $\alpha-1/4-\delta>1$ pour $\delta$ suffisament petit. □

Passons à la contribution des *nml* carrés, donnant le terme principal de l'estimation.

**Lemme 5.6.** *Pour tout $s=\sigma+i\tau$ avec $\sigma>1/2$, tout $a=\alpha+i\beta$ avec $\alpha>3/2$ et $\sigma<\alpha$ et tout $\delta>0$,*

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\square}(s,a,Y,Z)=c(s,a)Y+O(YZ^{1/2-\sigma+\delta}+Y^{1/2}Z^{2-2\sigma+\delta}+Y^{1/2}),$$

*où $c(s,a)$ est la constante donnée dans la proposition 5.1.*

*Démonstration.* Rappelons que

$$\mathcal{S}^{\pm}_{\square}(s,a,Y,Z)=\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{d(n,Z)}{n^s}\frac{\mu(m)\mu(\ell)}{(m\ell)^a}\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^{\pm}(Y)}\left(\frac{\Delta}{u^2}\right).$$

Nous noterons $\varphi$ l'indicatrice d'Euler et

$$\psi(u)=\begin{cases}3/8 & \text{si } u \text{ est impair ;}\\ 1/2 & \text{si } u \text{ est pair.}\end{cases}$$

D'après [36, Lemme 15], pour tout entier $u\geqslant 1$ et tout $Y>0$,

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^{\pm}(Y)}\left(\frac{\Delta}{u^2}\right)=u^{-1}\psi(u)\varphi(u)\Bigg(\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\mu(q)q^{-2}\Bigg)Y+O(uY^{1/2}).$$

De plus, comme précisé à la remarque 5.4, $d(n,Z)=d(n)$ si $n\leqslant Z$ et sinon

$$d(n,Z)\ll n^{\delta},$$

pour tout $\delta>0$. Par ailleurs, $\varphi(u)\leqslant u$, donc

$$u^{-1}\psi(u)\varphi(u)\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\mu(q)q^{-2}\ll 1.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\square}^{\pm}(s,a,Y,Z)\\
&\quad=Y\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\psi(u)\varphi(u)}{u}\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{d(n,Z)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}\\
&\qquad+O\left(Y^{1/2}\sum_{u=1}^{\infty}u\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}\right)\\
&\quad=Y\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\psi(u)\varphi(u)}{u}\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{\substack{n\leqslant Z\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}\\
&\qquad+O\left(Y\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{Z<n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}+Y^{1/2}\sum_{u=1}^{\infty}u\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}\right)\\
&\quad=Y\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\psi(u)\varphi(u)}{u}\sum_{\substack{q=1\\(2u,q)=1}}^{\infty}\frac{\mu(q)}{q^2}\sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}\\
&\qquad+O\left(2Y\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{\substack{n>Z\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}+Y^{1/2}\sum_{u=1}^{\infty}u\sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}}\frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}\right).
\end{aligned}\tag{5.2}$$

Vérifions maintenant que le nombre multipliant $Y$ dans le terme principal de (5.2) est bien la constante

$$c(s,a) = \frac{\zeta(2s)^2}{2} \prod_{\substack{p \\ \text{premier}}} \left( \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p^{2a}} + \frac{1}{p^{2(a+s)}} - \frac{4}{p^{a+s}} - \frac{1}{p^{4s}} + \frac{3}{p^{2s}}\right)\right).$$

Exprimons donc

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{\psi(u)\varphi(u)}{u} \sum_{\substack{q=1 \\ (2u,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q^2} \sum_{\substack{n,m,\ell \geqslant 1 \\ nm\ell = u^2}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s (m\ell)^a}$$

sous la forme d'un produit eulérien. On a, pour tout $u \geqslant 1$,

$$\psi(u) \sum_{\substack{q=1 \\ (2u,q)=1}}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q^2} = \frac{1}{2\zeta(2)} \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid u}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

De plus, la fonction arithmétique

$$u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u} \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid u}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{\substack{n,m,\ell \geqslant 1 \\ nml = u^2}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s (m\ell)^a}$$

est multiplicative. Nous pouvons donc écrire

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u} \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid u}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{\substack{n,m,\ell \geqslant 1 \\ nm\ell = u^2}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s (m\ell)^a}$$
$$= \prod_{\substack{p \\ \text{premier}}} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\varphi(p^r)}{p^r} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{\substack{n,m,\ell \geqslant 1 \\ nml = p^{2r}}} \frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s (m\ell)^a}\right).$$

De plus, pour tout nombre premier $p$ et tout nombre entier $r \geqslant 1$,

$$\frac{\varphi(p^r)}{p^r} = \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Par ailleurs, les termes de la somme

$$\sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=p^{2r}}}\frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a}$$

sont nuls sauf si $(m,\ell)\in\{(1,1),(1,p),(p,1),(p,p)\}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n,m,\ell\geqslant 1\\ nml=p^{2r}}}\frac{d(n)\mu(m)\mu(\ell)}{n^s(m\ell)^a} &= \frac{d(p^{2r})}{(p^{2r})^s}-2\frac{d(p^{2r-1})}{(p^{2r-1})^s p^a}+\frac{d(p^{2r-2})}{(p^{2r-2})^s p^{2a}}\\ &= \frac{2r+1}{p^{2rs}}-2\frac{2r}{p^{(2r-1)s}p^a}+\frac{2r-1}{p^{(2r-2)s}p^{2a}}\\ &= \frac{1}{p^{2rs}}\left(2r\left(1-\frac{2}{p^{a-s}}+\frac{1}{p^{2(a-s)}}\right)+1-\frac{1}{p^{2(a-s)}}\right)\\ &= \frac{1}{p^{2rs}}\left(2r\left(1-\frac{1}{p^{a-s}}\right)^2+1-\frac{1}{p^{2(a-s)}}\right).\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2rs}}\left(2r\left(1-\frac{1}{p^{a-s}}\right)^2+1-\frac{1}{p^{2(a-s)}}\right)\\ &\quad=\frac{1}{p^{2s}}\left(2\left(1-\frac{1}{p^{a-s}}\right)^2\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2}+\left(1-\frac{1}{p^{2(a-s)}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}\right)\\ &\quad=\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2}\left(\frac{1}{p^{2a}}+\frac{1}{p^{2(a+s)}}-\frac{4}{p^{a+s}}-\frac{1}{p^{4s}}+\frac{3}{p^{2s}}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, la constante du terme principal de (5.2) est égale à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\zeta(2)}\prod_{\substack{p\\ \text{premier}}}&\left(1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-2}\times\right.\\ &\qquad\left.\times\left(\frac{1}{p^{2a}}+\frac{1}{p^{2(a+s)}}-\frac{4}{p^{a+s}}-\frac{1}{p^{4s}}+\frac{3}{p^{2s}}\right)\right)\end{aligned}$$

et en mettant $\zeta(2)\zeta(2s)^2$ en facteur, celle-ci est égale à

$$\frac{\zeta(2s)^2}{2} \prod_{\substack{p\\ \text{premier}}} \left( \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p^{2a}}+\frac{1}{p^{2(a+s)}}-\frac{4}{p^{a+s}}-\frac{1}{p^{4s}}+\frac{3}{p^{2s}}\right)\right).$$

Pour terminer la preuve, il nous reste à calculer le terme d'erreur dans (5.2), à savoir

$$Y\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{\substack{n>Z\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}} \frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}} + Y^{1/2}\sum_{u=1}^{\infty} u \sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}} \frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}}.$$

Nous aurons besoin de l'estimation suivante : pour tout nombre entier $u \geqslant 1$ et tout $\delta > 0$,

$$\#\{(m,\ell)\in \mathbf{N}^2,\ m\ell \mid u\} \leqslant d(u)^2 \ll u^{\delta}.$$

Nous avons, pour $\delta > 0$ suffisamment petit,

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{\substack{n>Z\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}} \frac{1}{n^{\sigma-\delta}(ml)^{\alpha}} &\ll \sum_{m,\ell\geqslant 1} (m\ell)^{-\alpha+\sigma-\delta} \sum_{\substack{u>\sqrt{m\ell Z}\\ m\ell\mid u^2}} u^{-2\sigma+2\delta}\\
&\ll \sum_{m,\ell\geqslant 1} (m\ell)^{-\alpha+\sigma-\delta}(\sqrt{m\ell Z})^{1-2\sigma+2\delta}\\
&\ll Z^{1/2-\sigma+\delta} \sum_{m,\ell\geqslant 1} (m\ell)^{1/2-\alpha}\\
&\ll Z^{1/2-\sigma+\delta}
\end{aligned}$$

puisque $\sigma > 1/2$ et $\alpha > 3/2$. Enfin,

$$\sum_{u=1}^{\infty} u \sum_{\substack{n\leqslant Z^2\\ m,\ell\geqslant 1\\ nm\ell=u^2}} \frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}} \ll \sum_{u=1}^{\infty} u^{1-2\sigma+2\delta} \sum_{\substack{m,\ell\\ ml\mid u^2\\ m\ell\geqslant u^2/Z^2}} (m\ell)^{\sigma-\alpha-\delta}$$

Or, puisque $\sigma < \alpha$,

$$\sum_{\substack{m,\ell \\ ml \mid u^2 \\ m\ell \geqslant u^2/Z^2}} (m\ell)^{\sigma-\alpha-\delta} \ll \begin{cases} \#\{(m,\ell), m\ell \mid u^2\} \cdot 1 & \text{si } u \leqslant Z \\ \#\{(m,\ell), m\ell \mid u^2\} \cdot \left(\frac{u^2}{Z^2}\right)^{\sigma-\alpha-\delta} & \text{si } u > Z \end{cases}$$

$$\ll \begin{cases} u^{\delta} & \text{si } u \leqslant Z \\ Z^{2\alpha-2\sigma+2\delta} u^{2\sigma-2\alpha+\delta} & \text{si } u > Z. \end{cases}$$

Donc, pour $\delta$ assez petit,

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{\infty} u \sum_{\substack{n \leqslant Z^2 \\ m,\ell \geqslant 1 \\ nm\ell = u^2}} \frac{1}{n^{\sigma-\delta}(m\ell)^{\alpha}} &\ll \sum_{u \leqslant Z} u^{1-2\sigma+3\delta} + Z^{2\alpha-2\sigma+2\delta} \sum_{u > Z} u^{1-2\alpha+3\delta} \\ &\ll \max\{1, Z^{2-2\sigma+\delta}\} + Z^{2-2\sigma+\delta} \\ &\ll Z^{2-2\sigma+\delta} + 1. \end{aligned}$$

□

D'après les lemmes 5.5 et 5.6 et la relation (5.1), nous déduisons que, pour tout $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > 1/2$, tout $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 3/2$ et $\sigma < \alpha$ et tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y) = c(s,a)Y + O\Big(& Y^{2+\delta} Z^{-2\sigma} + Y^{3/2+\delta} Z^{-2\sigma+1} + Y^{3/2+\delta} Z^{-\sigma+\delta} + \\ & + Y^{1/2} + Y^{1/2} Z^{-2\sigma+5/2+\delta} + Y Z^{1/2-\sigma+\delta} + Y^{1/2} Z^{2-2\sigma+\delta}\Big). \end{aligned}$$

Posons alors $k = 2/3$ pour obtenir

$$\mathcal{S}^{\pm}(s,a,Y) = c(s,a)Y + O\left(Y^{\max\{13/6-4\sigma/3+\delta, 3/2-2\sigma/3, 1/2+\delta\}}\right).$$

Ceci clôt la démonstration de la proposition 5.1.

## 5.2 Démonstration de la proposition 4.12

L'estimation de la proposition 5.1 nous permet maintenant de démontrer la proposition 4.12 donnant certaines sommes arithmétiques dont nous avons eu besoin pour la preuve du théorème 4.4.

Rappelons, avant de la démontrer, l'énoncé de cette proposition et les notations utilisées. Soient $\Delta \in \mathcal{D}$ et $L$ est le corps quadratique de discriminant $\Delta$. Rappelons que pour tout nombre réel $u > 0$,

$$\log^+(u) = \max\{1, \log u\}.$$

Nous noterons alors

$$c_\Delta = \frac{\gamma_\Delta \lambda_\Delta h_L R_L}{w_L \zeta_L(2)\,|\Delta|}, \qquad c^*_\Delta = \sqrt{\frac{h_L R_L \log^+(h_L R_L)}{|\Delta|}},$$

avec

$$\gamma_\Delta = \begin{cases} \gamma^- = 2\pi & \text{si } \Delta < 0 \\ \gamma^+ = 8 & \text{si } \Delta > 0 \end{cases}, \qquad \lambda_\Delta = \begin{cases} \lambda^- = 2\pi, & \text{si } \Delta < 0 \\ \lambda^+ = 4 & \text{si } \Delta > 0 \end{cases}$$

et enfin,

$$\delta_\Delta = \max\left\{1, \frac{|\Delta|^{1/4}}{\sqrt{2}}\right\}.$$

**Proposition 5.7.** *Soient $Y \geqslant 1$ et $B \geqslant 1$ des nombres réels.*

*1.* $\displaystyle\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^\pm(Y)} c_\Delta^2 = c_0^\pm \log(Y) + O(1)$, *où*

$$c_0^\pm = \frac{(\gamma^\pm)^2}{2} \prod_p \left(1 - 7p^{-3} + 7p^{-4} - p^{-7}\right).$$

*2.* $\displaystyle\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^\pm(Y)} c_\Delta^2 \log(\delta_\Delta^2) = \frac{1}{4} c_0^\pm \log^2(Y) + O(\log Y).$

*3.* $\displaystyle\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{c^*_\Delta c_\Delta}{\delta_\Delta} = O((\log Y)^{3/2}).$

*4.* $\displaystyle\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^\pm(Y)} (c^*_\Delta)^2 = O(Y^{1/2} \log Y).$

*5.* $\displaystyle\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^\pm(Y)} (c^*_\Delta)^2 \log\left(\frac{B^{1/4}}{\delta_\Delta^2}\right) = O\left(Y^{1/2} \log Y \log\left(\frac{2B^{1/4}}{Y^{1/2}}\right) + Y^{1/2} \log Y\right).$

*Démonstration.* 1. On a, d'après la proposition 5.1, pour tout $\delta > 0$,

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{L(1,\Delta)^2}{L(2,\Delta)^2} = c(1,2)Y + O(Y^{5/6+\delta})$$

où
$$c(1,2) = \frac{\zeta(2)^2}{2} \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - 7p^{-3} + 7p^{-4} - p^{-7}\right).$$
En utilisant les égalités

$$\frac{\lambda^{\pm} h_\Delta R_\Delta}{w_\Delta \left|\Delta\right|^{1/2}} = L(1,\Delta) \qquad \text{et} \qquad \zeta_\Delta(2) = \zeta(2) L(2,\Delta), \tag{5.3}$$

on obtient :
$$c_\Delta^2 = (\gamma^{\pm})^2 \zeta(2)^{-2} \frac{L(1,\Delta)^2}{|\Delta|\, L(2,\Delta)^2}.$$
Par la formule sommatoire d'Abel, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} c_\Delta^2 &= \frac{(\gamma^{\pm})^2}{\zeta(2)^2} \left( \frac{c(1,2)Y + O(Y^{5/6+\delta})}{Y} + \right.\\ &\qquad \left. + \int_1^Y \frac{c(1,2)u + O(u^{5/6+\delta})}{u^2} \, \mathrm{d}u \right)\\ &= \frac{(\gamma^{\pm})^2}{\zeta(2)^2} c(1,2) \log Y + O(1).\end{aligned}$$

2. Remarquons que le seul discriminant $\Delta$ tel que $\delta_\Delta = 1$ est $\Delta = -3$. Ainsi, par ce qui précède et une transformation d'Abel,

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} c_\Delta^2 \log(\delta_\Delta^2) &= \sum_{\Delta \in \mathcal{D}^{\pm}(Y)} c_\Delta^2 \log\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}\right) + O(1)\\ &= \left(c_0^{\pm} \log(Y) + O(1)\right) \log\left(\frac{\sqrt{Y}}{2}\right) -\\ &\qquad - \int_1^Y \frac{c_0^{\pm} \log(u) + O(1)}{2u} \, \mathrm{d}u + O(1)\\ &= \frac{1}{2} c_0^{\pm} \log^2(Y) - \frac{1}{4} c_0^{\pm} \log^2(Y) + O(\log Y).\\ &= \frac{1}{4} c_0^{\pm} \log^2(Y) + O(\log Y).\end{aligned}$$

3. D'après le théorème de Siegel, $h_\Delta R_\Delta \ll |\Delta|$, donc

$$\frac{c_\Delta^* c_\Delta}{\delta_\Delta} \ll \frac{(h_\Delta R_\Delta)^{3/2}}{w_\Delta \zeta_\Delta(2) \left|\Delta\right|^{7/4}} (\log Y)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\frac{h_\Delta R_\Delta}{|\Delta|^{3/2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{L(1,\Delta)}{L(2,\Delta)\sqrt{|\Delta|}} (\log Y)^{\frac{1}{2}}$$

toujours d'après les relations (5.3). Or

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^\pm(Y)} h_\Delta R_\Delta \ll Y^{3/2} \tag{5.4}$$

(voir [36, p.369] par exemple). Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{c_\Delta^* c_\Delta}{\delta_\Delta} &\ll \Bigg(\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{h_\Delta R_\Delta}{|\Delta|^{3/2}}\Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^\pm(Y)} \frac{L(1,\Delta)^2}{L(2,\Delta)^2\,|\Delta|}\Bigg)^{\frac{1}{2}} (\log Y)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll (\log Y)^{3/2}\end{aligned}$$

4. On a
$$(c_\Delta^*)^2 = \frac{h_\Delta R_\Delta \log^+(h_\Delta R_\Delta)}{|\Delta|}.$$
Étant donné que $\log^+(h_\Delta R_\Delta) \ll \log Y$ et la relation (5.4),
$$\sum_{\Delta\in\mathcal{D}^\pm(Y)} (c_\Delta^*)^2 \ll Y^{1/2}\log Y.$$

5. On utilise le résultat 4 et une sommation d'Abel, de la même manière qu'au deuxième point de cette démonstration.

$\square$

# BIBLIOGRAPHIE


[1] Tom Apostol : *Introduction to analytic number theory.* Springer-Verlag, New York, 1976. Undergraduate Texts in Mathematics.

[2] Enrique Artal Bartolo, Jorge Martín-Morales et Ortigas-Galindo Jorge : Cartier and weil divisors on varieties with quotient singularities. *arXiv :1104.5628*, 2011.

[3] Victor Batyrev et Yuri Manin : Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques. *Math. Ann.*, 286(1-3):27–43, 1990.

[4] Victor Batyrev et Yuri Tschinkel : Rational points on some Fano cubic bundles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(1):41–46, 1996.

[5] Victor Batyrev et Yuri Tschinkel : Manin's conjecture for toric varieties. *J. Algebraic Geom.*, 7(1):15–53, 1998.

[6] Victor Batyrev et Yuri Tschinkel : Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties. *Astérisque*, (251):299–340, 1998. Nombre et répartition de points de hauteur bornée (Paris, 1996).

[7] Arnaud Beauville : Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4):755–782 (1984), 1983.

[8] Enrico Bombieri et Walter Gubler : *Heights in Diophantine geometry*, volume 4 de *New Mathematical Monographs.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[9] Antoine Chambert-Loir et Yuri Tschinkel : Integral points of bounded height on toric varieties. *arXiv :1006.3345.*

[10] Antoine CHAMBERT-LOIR et Yuri TSCHINKEL : On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups. *Invent. Math.*, 148(2):421–452, 2002.

[11] Shey-Jey CHERN et Jeffrey VAALER : The distribution of values of Mahler's measure. *J. reine angew. Math.*, 540:1–47, 2001.

[12] Christian CHRISTENSEN et Walter GUBLER : Der relative Satz von Schanuel. *Manuscripta Math.*, 126(4):505–525, 2008.

[13] Olivier DEBARRE : *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[14] Andreas-Stephan ELSENHANS : Rational points on some Fano quadratic bundles. *Exp. Math.*, 20(4):373–379, 2011.

[15] Gerd FALTINGS : Calculus on arithmetic surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 119(2):387–424, 1984.

[16] John FOGARTY : Algebraic families on an algebraic surface. *Amer. J. Math*, 90:511–521, 1968.

[17] John FOGARTY : Algebraic families on an algebraic surface. II. The Picard scheme of the punctual Hilbert scheme. *Amer. J. Math.*, 95:660–687, 1973.

[18] Jens FRANKE, Yuri MANIN et Yuri TSCHINKEL : Rational points of bounded height on Fano varieties. *Invent. Math.*, 95(2):421–435, 1989.

[19] Xia GAO : *On Northcott's theorem*. 1995. Thesis (Ph.D.)–University of Colorado.

[20] Robin HARTSHORNE : *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[21] Jack HUIZENGA : Restrictions of Steiner bundles and divisors on the Hilbert scheme of points in the plane. *à paraître*, 2012.

[22] Jack HUIZENGA : Effective divisors on the Hilbert scheme of points in the plane and interpolation for stable bundles. *preprint*, 2013.

[23] Matti JUTILA : On character sums and class numbers. *J. Number Theory*, 5:203–214, 1973.

[24] Robert LAZARSFELD : *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[25] Cécile Le Rudulier : Points algébriques de hauteur bornée sur la droite projective. *À paraître au Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*.

[26] David Masser et Jeffrey Vaaler : Counting algebraic numbers with large height. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(1):427–445, 2007.

[27] Laurent Moret-Bailly : Un théorème de l'application ouverte sur les corps valués algébriquement clos. *Mathematica Scandinavica (à paraître)*.

[28] Amnon Neeman : Zero cycles in $\mathbf{P}^n$. *Adv. Math.*, 89(2):217–227, 1991.

[29] André Néron : Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes. *Ann. of Math. (2)*, 82:249–331, 1965.

[30] David Northcott : An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 45:502–509, 1949.

[31] Emmanuel Peyre : Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. *Duke Math. J.*, 79(1):101–218, 1995.

[32] Emmanuel Peyre : Points de hauteur bornée et géométrie des variétés (d'après Y. Manin et al.). *Astérisque*, (282), 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[33] Stephen Schanuel : On heights in number fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70:262–263, 1964.

[34] Stephen Schanuel : Heights in number fields. *Bull. Soc. Math. France*, 107(4):433–449, 1979.

[35] Wolfgang Schmidt : Northcott's theorem on heights. I. A general estimate. *Monatsh. Math.*, 115(1-2):169–181, 1993.

[36] Wolfgang Schmidt : Northcott's theorem on heights. II. The quadratic case. *Acta Arith.*, 70(4):343–375, 1995.

[37] Jean-Pierre Serre : *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Aspects of Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, third édition, 1997.

[38] Joseph Silverman : Lower bounds for height functions. *Duke Math. J.*, 51(2):395–403, 1984.

[39] Joseph Silverman : Rational points on symmetric products of a curve. *Amer. J. Math.*, 113(3):471–508, 1991.

[40] Keiichi WATANABE : Certain invariant subrings are Gorenstein. I, II. *Osaka J. Math.*, 11:1–8 ; ibid. 11 (1974), 379–388, 1974.

[41] Martin WIDMER : Counting points of fixed degree and bounded height. *Acta Arith.*, 140(2):145–168, 2009.

[42] Martin WIDMER : Counting points of fixed degree and bounded height on linear varieties. *J. Number Theory*, 130(8):1763–1784, 2010.

[43] Martin WIDMER : Counting primitive points of bounded height. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(9):4793–4829, 2010.

[44] Shouwu ZHANG : Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4(2):281–300, 1995.